

А.А.СЛАВНОВ, Л.Д.ФАДДЕЕВ

ВВЕДЕНИЕ
В КВАНТОВУЮ
ТЕОРИЮ
КАЛИБРОВОЧНЫХ
ПОЛЕЙ



А. А. СЛАВНОВ, Л. Д. ФАДДЕЕВ

ВВЕДЕНИЕ
В КВАНТОВУЮ
ТЕОРИЮ
КАЛИБРОВОЧНЫХ
ПОЛЕЙ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1978

22.161.6
С 47
УДК 517

Введение в квантовую теорию калибровочных полей. С л а в н о в А. А., Ф а д д е е в Л. Д. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», М., 1978, 240 стр.

Книга посвящена квантовой теории калибровочных полей. Дается формулировка квантовой теории поля в терминах континуального интеграла. Излагается общий метод квантования неголономных систем и на его основе строится схема квантования калибровочно-инвариантных теорий поля. Формулируется инвариантная процедура перенормировки калибровочных теорий. Обсуждаются применения калибровочных полей в физике элементарных частиц.

Илл. 19, библи. 98.

С $\frac{20203-164}{053(02)-78}$ 56-78

© Главная редакция
физико-математической литературы
издательства «Наука», 1978

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава I. Введение	7
§ 1. Основные понятия и обозначения	7
§ 2. Геометрическая интерпретация поля Янга — Миллса . .	16
§ 3. Динамические модели с калибровочными полями	21
Глава II. Квантовая теория в терминах континуального ин-	
теграла	29
§ 1. Континуальный интеграл по фазовому пространству . . .	29
§ 2. Континуальный интеграл в голоморфном представлении .	36
§ 3. Производящий функционал для S -матрицы в теории поля .	42
§ 4. Континуальный интеграл по ферми-полям	56
§ 5. Свойства континуального интеграла в теории возмущений .	66
Глава III. Квантование поля Янга—Миллса	76
§ 1. Лагранжиан поля Янга — Миллса и специфика его кванто-	
вания	76
§ 2. Гамильтонова формулировка поля Янга — Миллса и его	
квантование	79
§ 3. Ковариантные правила квантования и фейнмановская диа-	
граммная техника	94
§ 4. Взаимодействие с полями материи	109
Глава IV. Перенормировка калибровочных теорий	125
§ 1. Примеры простейших диаграмм	125
§ 2. R -операция и контрчлены	133
§ 3. Инвариантные регуляризации. Метод Паули — Вилларса . .	139
§ 4. Метод высших ковариантных производных	147
§ 5. Размерная регуляризация	155
§ 6. Обобщенные тождества Уорда	164

§ 7. Структура перенормированного действия	174
§ 8. Перенормированная S -матрица	192
§ 9. Аномальные тождества Уорда	201
Глава V. Заключение. Некоторые приложения и литературные указания	210
§ 1. Объединенные модели слабых и электромагнитных взаимо- действий	210
§ 2. Асимптотическая свобода. Калибровочные теории сильных взаимодействий	220
Примечания и литературные указания	231
Цитированная литература	236
Используемые обозначения	239

ПРЕДИСЛОВИЕ

Прогресс квантовой теории поля за последние 10 лет в значительной мере связан с развитием теории полей Янга — Миллса или, как их иногда называют, калибровочных полей. Эти поля открывают новые возможности для описания взаимодействий элементарных частиц в рамках квантовой теории поля. Калибровочные поля участвуют в большинстве современных моделей как сильных, так и слабых и электромагнитных взаимодействий. При этом возникает чрезвычайно привлекательная перспектива объединения всех взаимодействий в одно универсальное.

В то же время в современной монографической литературе поля Янга — Миллса освещены явно не достаточно. Хотя с точки зрения общей квантовой теории поля теория Янга — Миллса представляется довольно частной моделью, но она весьма специфична и методы, используемые в этой теории, значительно отличаются от традиционных. Существующая монография Коноплевой и Попова «Калибровочные поля» посвящена главным образом геометрическим аспектам теории калибровочных полей и недостаточно подробно освещает квантовую теорию полей Янга — Миллса. Мы надеемся, что данная книга в какой-то мере восполнит этот пробел.

Основным техническим методом в квантовой теории калибровочных полей является метод континуального интегрирования. Поэтому в данной книге уделяется большое внимание описанию этого альтернативного подхода к квантовой теории поля. Мы старались изложить этот метод достаточно последовательно и самосогласованно, отправляясь от самых основ квантовой теории. Тем не менее для более глубокого понимания книги желательно, чтобы читатель был знаком с традиционным аппаратом квантовой теории, например, в объеме первых че-

тырех глав книги Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова «Введение в теорию квантованных полей». В частности, мы не будем вдаваться в детали сопоставления диаграмм Фейнмана членам ряда теории возмущений, и строгого обоснования процедуры перенормировки на основе R -операции. Эти вопросы не специфичны для теории Янга—Миллса и подробно освещены в упомянутой выше монографии.

Журнальная литература, посвященная полям Янга — Миллса, весьма обширна, и мы не собираемся делать сколько-нибудь полный ее обзор. Наша цель — познакомить читателя с методами квантовой теории Янга — Миллса. При этом мы не будем обсуждать альтернативные подходы к этой теории, а изложим подробно тот подход, который нам представляется наиболее простым и естественным. Приложения, которые мы затрагиваем в книге, носят характер иллюстраций, и не являются последним словом в применении полей Янга — Миллса к моделям элементарных частиц. Мы делаем это сознательно, так как феноменологические аспекты калибровочных теорий быстро развиваются и изменяются. В то же время техника квантования и перенормировки полей Янга — Миллса являются относительно установившимися. Именно этим вопросам и посвящена в основном наша книга.

Мы благодарны нашим коллегам по Математическому институту им. В. А. Стеклова в Москве и в Ленинграде за многочисленные полезные обсуждения проблем, затронутых в этой книге.

Мы хотели бы особенно поблагодарить О. И. Завьялова и Д. В. Ширкова, прочитавших рукопись и сделавших много полезных замечаний, и Э. Ш. Егорьяна за помощь в проверке формул.

Москва — Ленинград — Кировск

А. Славнов, Л. Фаддеев

Глава I



ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Основные понятия и обозначения

На первый взгляд, теория калибровочных полей, которую мы собираемся обсуждать в этой книге, описывает лишь весьма узкий класс моделей квантовой теории поля. Однако все бóльшую популярность приобретает мнение, что именно она имеет шансы стать основой теории элементарных частиц. Это убеждение основано на следующем.

Во-первых, полностью подтверждаемая экспериментом теория (до сих пор единственная) — квантовая электродинамика, является частным случаем калибровочной теории.

Во-вторых, феноменологические модели слабых взаимодействий получили элегантную и последовательную формулировку в рамках калибровочных теорий. Феноменологическое четырехфермионное взаимодействие заменилось взаимодействием с промежуточной векторной частицей — квантом поля Янга — Миллса. Согласование экспериментальных данных с требованием калибровочной инвариантности привело к предсказанию слабых нейтральных токов и нового квантового числа для адронов (очарования).

В-третьих, феноменологические кварковые модели сильных взаимодействий, по-видимому, также получают наиболее естественное обоснование в рамках калибровочных теорий. Калибровочные теории дают уникальную возможность описать в рамках квантовой теории поля явление асимптотической свободы. С ними же связываются надежды на объяснение удержания кварков, хотя этот вопрос пока не очень ясен.

Наконец, при расширенном толковании принципа калибровочной инвариантности гравитационное взаимодей-

ствие также укладывается в общую схему полей Янга — Миллса.

Таким образом, возникает возможность объяснения на основе единого принципа всей иерархии существующих в природе взаимодействий. Дискредитированный в свое время термин «единая теория поля» приобретает новое, реальное звучание в теории калибровочных полей. Независимо от того, насколько сбудутся эти большие ожидания, теория полей Янга — Миллса уже сегодня прочно вошла в арсенал теоретической физики и, без сомнения, займет важное место в будущей теории элементарных частиц.

В формировании этой картины приняло участие большое количество исследователей. Упомянем несколько ключевых дат.

В 1953 году Янг и Миллс впервые обобщили принцип градиентной инвариантности взаимодействия электрических зарядов на случай взаимодействия изоспинов. В их работе было введено векторное поле, получившее впоследствии название поля Янга — Миллса, и в рамках классической теории поля развита его динамика.

В 1967 году Фаддеевым и Поповым и Де Виттом была построена последовательная схема квантования безмассовых полей Янга — Миллса. В том же году Вейнберг и Салам независимо друг от друга предложили объединенную калибровочную модель слабых и электромагнитных взаимодействий, в которой электромагнитное поле и поле промежуточного векторного мезона объединялись в мультиплет полей Янга — Миллса. Эта модель основывалась на механизме появления массы векторных мезонов в результате спонтанного нарушения симметрии, предложенном ранее Хиггсом и Кибблом.

В 1971 году Г. т'Хоофт показал, что общие методы квантования безмассовых полей Янга — Миллса практически без изменения переносятся на случай спонтанно нарушенной симметрии. Тем самым была открыта возможность построения последовательной квантовой теории массивных векторных полей, столь нужных для теории слабых взаимодействий и, в частности, для модели Салама — Вейнберга.

К 1972 году было в основном закончено построение квантовой теории калибровочных полей в рамках тео-

рии возмущений. В работах А. Славнова, Дж. Тейлора, Б. Ли и Ж. Зин-Жюстена, Г. т'Хоофта и М. Вельтмана были развиты различные методы инвариантной регуляризации, получены обобщенные тождества Уорда и построена процедура перенормировки ряда теории возмущений. Это привело к построению конечной и унитарной матрицы рассеяния для поля Янга — Миллса.

С этого времени началось бурное развитие теории калибровочных полей, как в чисто теоретическом, так и в феноменологическом аспектах. Историю его можно проследить, например, по обзорным докладам на трех последних Международных конференциях по физике высоких энергий (Б. Ли, 1972 г. Батавия, Ж. Иллиопулос, 1974 г. Лондон, А. Славнов, 1976 г. Тбилиси).

После этого краткого исторического обзора перейдем к описанию самого поля Янга — Миллса. Для этого нам придется напомнить некоторые обозначения из теории компактных групп Ли *). Точнее, нас будут в основном интересовать алгебры Ли этих групп. Пусть Ω — компактная полупростая группа Ли, т. е. компактная группа, не имеющая инвариантных коммутативных (абелевых) подгрупп. Число независимых параметров, характеризующих произвольный элемент группы (размерность), равно n . Среди представлений этой группы и ее алгебры Ли существует представление матрицами $n \times n$ (присоединенное представление). Оно порождается естественным действием группы на саму себя преобразованиями подобия

$$h \rightarrow \omega h \omega^{-1}; \quad h, \omega \in \Omega. \quad (1.1)$$

Любая матрица $\mathcal{T}$ в присоединенном представлении алгебры Ли может быть представлена в виде линейной комбинации n генераторов

$$\mathcal{T} = T^a \alpha^a. \quad (1.2)$$

Для нас важно, что генераторы T^a можно нормировать условием

$$\text{tr}(T^a T^b) = -2\delta^{ab}. \quad (1.3)$$

В этом случае структурные константы f^{abc} , участвующие

*) Часть обозначений помещена в конце книги.

т. к. группа Ли это
многообразие с групповым
структурными

в условии

$$[T^a, T^b] = t^{abc}T^c, \quad (1.4)$$

полностью антисимметричны. Читатель, незнакомый с теорией групп Ли, может запомнить лишь эти два соотношения, которые на самом деле являются характеристическим свойством компактной полупростой группы Ли.

Компактная полупростая группа называется простой, если она не имеет инвариантных подгрупп Ли. Полупростая группа общего вида является произведением простых групп. Это значит, что матрицы алгебры Ли в присоединенном представлении имеют блочно-диагональную форму, где каждый блок отвечает одному из простых сомножителей. Генераторы группы можно выбрать таким образом, что каждый из них имеет отличные от нуля матричные элементы только внутри одного из блоков. Мы всегда будем иметь в виду именно такой выбор генераторов, согласованный со структурой прямого произведения.

Простейшим примером такой группы является простая группа $SU(2)$. Размерность этой группы 3, алгебра Ли в присоединенном представлении задается антисимметричными матрицами 3×3 ; в качестве генераторов можно выбрать матрицы

$$T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad T^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (1.5)$$

структурные константы t^{abc} в этом базисе совпадают с полностью антисимметричным тензором ε^{abc} .

Помимо полупростых компактных групп, мы будем рассматривать также коммутативную (абелеву) группу $U(1)$. Элементами этой группы являются комплексные числа, по модулю равные единице. Алгебра Ли этой группы одномерна и образована мнимыми числами, или вещественными антисимметричными матрицами 2×2 .

Поле Янга — Миллса можно ассоциировать с любой компактной полупростой группой Ли. Оно задается векторным полем $\mathcal{A}_\mu(x)$, принимающим значения в алгебре Ли этой группы. Удобно считать $\mathcal{A}_\mu(x)$ матрицей в присоединенном представлении этой алгебры. В этом случае

оно определяется своими коэффициентами $A_\mu^a(x)$

$$\mathcal{A}_\mu(x) = A_\mu^a(x) T^a \quad (1.6)$$

по отношению к базису генераторов T^a .

Аналогичным объектом в случае группы $U(1)$ является электромагнитное поле $\mathcal{A}_\mu(x) = iA_\mu(x)$.

Перейдем к определению калибровочной группы и ее действия на поля Янга — Миллса. В случае электродинамики калибровочное преобразование — это хорошо знакомое градиентное преобразование

$$\mathcal{A}_\mu(x) \rightarrow \mathcal{A}_\mu(x) + i\partial_\mu\lambda(x). \quad (1.7)$$

Напомним его происхождение в рамках классической теории поля. Электромагнитное поле взаимодействует с заряженными полями, которые описываются функциями $\psi(x)$, принимающими комплексные значения. В уравнения движения поле $\mathcal{A}_\mu(x)$ всегда входит в комбинации

$$\nabla_\mu\psi = (\partial_\mu - \mathcal{A}_\mu)\psi = (\partial_\mu - iA_\mu)\psi. \quad (1.8)$$

Указанное выше градиентное преобразование обеспечивает ковариантность этой комбинации по отношению к фазовому преобразованию полей ψ . Если ψ преобразуется по закону

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow e^{i\lambda(x)}\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow e^{-i\lambda(x)}\bar{\psi}(x), \end{aligned} \quad (1.9)$$

то также преобразуется и $\nabla_\mu\psi$. Действительно,

$$\begin{aligned} (\partial_\mu - \mathcal{A}_\mu)\psi &\rightarrow [\partial_\mu - i\partial_\mu\lambda(x) - \mathcal{A}_\mu(x)] e^{i\lambda(x)}\psi(x) = \\ &= e^{i\lambda(x)} [\partial_\mu - \mathcal{A}_\mu(x)] \psi(x). \end{aligned} \quad (1.10)$$

В результате уравнения движения также ковариантны по отношению к преобразованиям (1.7), (1.9); если пара $\psi(x)$, $\mathcal{A}_\mu(x)$ является решением, то и $e^{i\lambda(x)}\psi(x)$, $\mathcal{A}_\mu(x) + i\partial_\mu\lambda(x)$ тоже решение.

Другими словами, локальное изменение фазы поля $\psi(x)$, которую можно считать координатной в зарядовом пространстве, эквивалентно появлению дополнительного электромагнитного поля. Мы усматриваем здесь полную аналогию со слабым принципом эквивалентности теории тяготения Эйнштейна, где изменение системы отсчета

приводит к появлению дополнительного гравитационного поля.

Развивая далее эту аналогию, можно сформулировать принцип относительности в зарядовом пространстве, впервые введенный Германом Вейлем в 1929 году: полевые конфигурации $\psi(x)$, $\mathcal{A}_\mu(x)$ и $\psi(x)e^{i\lambda(x)}$, $\mathcal{A}_\mu(x) + + i\partial_\mu\lambda(x)$ описывают одну и ту же физическую ситуацию. Если положить этот принцип в основу построения теории, то описанная выше конструкция уравнений движения с помощью ковариантных производных является единственно возможной.

Обобщение этого принципа на случай более сложного зарядового пространства приводит к теории Янга — Миллса. Примерами таких зарядовых, или, как их иногда называют, внутренних пространств, являются изотопическое пространство, пространство унитарного спина в теории адронов и т. д. Во всех этих примерах мы имеем дело с полями $\psi(x)$, принимающими значения в зарядовом пространстве, которое само является пространством представления некоторой компактной полупростой группы Ω ($SU(2)$, $SU(3)$ и т. д.). В уравнениях движения для полей $\psi(x)$ участвует ковариантная производная

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - \Gamma(\mathcal{A}_\mu), \quad (1.11)$$

где $\Gamma(\mathcal{A}_\mu)$ — представление матрицы $\mathcal{A}_\mu$, соответствующее данному представлению группы Ω . Например, если $\Omega = SU(2)$, и зарядовое пространство отвечает его двумерному представлению, то упомянутые выше генераторы T^a представляются матрицами Паули

$$\Gamma(T^a) = \frac{1}{2i} \tau^a, \quad (1.12)$$

где

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

и в этом случае

$$\Gamma(\mathcal{A}_\mu) = \frac{1}{2i} A_\mu^a \tau^a. \quad (1.14)$$

Преобразование полей $\psi(x)$, аналогичное локальному фазовому преобразованию в электродинамике, имеет вид

$$\psi(x) \rightarrow \psi^\omega(x) = \Gamma[\omega(x)] \psi(x), \quad (1.15)$$

где $\omega(x)$ — функция x со значениями в группе Ω . Удобно считать $\omega(x)$ матрицей в присоединенном представлении группы Ω . Производная (1.11) будет ковариантна по отношению к этому преобразованию, если поле $\mathcal{A}_\mu(x)$ преобразуется по закону

$$\mathcal{A}_\mu(x) \rightarrow \mathcal{A}_\mu^\omega(x) = \omega(x) \mathcal{A}_\mu(x) \omega^{-1}(x) + \partial_\mu \omega(x) \omega^{-1}(x). \quad (1.16)$$

Нетрудно убедиться, что это преобразование удовлетворяет групповому закону. Множество этих преобразований образует группу, которую можно формально обозначить как

$$\tilde{\Omega} = \prod_x \Omega. \quad (1.17)$$

Эта группа называется группой калибровочных преобразований.

Часто удобно иметь дело с инфинитезимальной формой калибровочного преобразования. Пусть матрицы $\omega(x)$ бесконечно мало отличаются от единичной:

$$\omega(x) = 1 + \alpha(x) = 1 + \alpha^a(x) T^a, \quad (1.18)$$

где $\alpha(x)$ принадлежит алгебре Ли группы Ω .

Тогда изменение $\mathcal{A}_\mu$ при таком преобразовании имеет вид

$$\delta \mathcal{A}_\mu = \partial_\mu \alpha - [\mathcal{A}_\mu, \alpha] = \nabla_\mu \alpha, \quad (1.19)$$

или, в компонентах,

$$\delta A_\mu^a = \partial_\mu \alpha^a - t^{abc} A_\mu^b \alpha^c. \quad (1.20)$$

Соответствующее преобразование для ψ имеет вид

$$\delta \psi = \Gamma(\alpha) \psi. \quad (1.21)$$

Ясно, что группа градиентных преобразований электродинамики является частным случаем калибровочной группы.

Существование ковариантных производных позволяет динамически реализовать принцип относительности во внутреннем пространстве: полевые конфигурации $\psi(x)$, $\mathcal{A}_\mu(x)$ и $\Gamma[\omega(x)]\psi(x)$, $\mathcal{A}_\mu^\omega(x)$ описывают одну и ту же физическую ситуацию. Положив в основу построения динамики этот принцип, мы автоматически придем к теории Янга — Миллса.

Принцип относительности означает, что истинной физической конфигурации соответствует не один набор полей, а целый класс калибровочно эквивалентных конфигураций. Более наглядно он утверждает, что во внутреннем зарядовом пространстве не существует выделенного фиксированного базиса, относительно которого физические поля материи ψ представляются в виде набора $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m)$. Такой базис можно вводить локально в каждой точке пространства-времени, однако нет физической причины для фиксации его расположения. Локальное изменение базиса интерпретируется как изменение калибровочного поля, играющего роль, аналогичную гравитационному или электромагнитному полям.

Принцип относительности приводит к значительному формальному отличию в описании динамики калибровочных полей по сравнению с более привычными полями, такими, например, как самодействующее скалярное поле. Чтобы практически работать с классами эквивалентных конфигураций, их надо как-нибудь параметризовать, т. е. выбрать однозначных представителей в каждом классе. Обычно этого достигают, наложив дополнительное условие, уничтожающее калибровочный произвол. Это дополнительное условие называют калибровочным условием, или просто калибровкой. Наиболее употребительными калибровками являются условия:

$$\begin{aligned} \Phi_L &\equiv \partial_\mu \mathcal{A}_\mu = 0 && \text{(лоренцева калибровка),} \\ \Phi_C &\equiv \partial_k \mathcal{A}_k = 0 && \text{(кулоновская калибровка),} \\ \Phi_H &\equiv \mathcal{A}_0 = 0 && \text{(гамильтонова калибровка),} \\ \Phi_A &\equiv \mathcal{A}_3 = 0 && \text{(аксиальная калибровка).} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Для общей системы, включающей как поля $\mathcal{A}_\mu$, так и поля ψ , последние могут входить в калибровочное условие. Примеры таких условий мы приведем ниже в § 3.

В общем виде калибровочное условие $\Phi(A, \psi; x)$ представляет собой семейство функционалов от $\mathcal{A}_\mu$ и ψ по одному для каждого x . При фиксированном x $\Phi(A, \psi; x)$ представляет собой элемент алгебры Ли группы G , так что число независимых калибровочных условий совпадает с размерностью калибровочной группы. В примерах (1.22) все условия имеют именно такой вид.

Кроме того, в этих примерах калибровочные условия локальны, т. е. $\Phi(A, \psi; x)$ зависит от значений $\mathcal{A}_\mu$ и ψ в окрестности точки x .

Обсудим требования, которым должны удовлетворять калибровочные условия. Важнейшее из них состоит в том, что система уравнений

$$\Phi(A^\omega, \psi^\omega; x) = 0 \quad (1.23)$$

при фиксированных $\mathcal{A}_\mu$ и ψ имеет однозначное решение $\omega(x)$. Это требование означает, что в каждом классе эквивалентных полей действительно содержится единственный набор полей $\mathcal{A}_\mu, \psi$, удовлетворяющий условию (1.23). Этот набор, взятый в качестве представителя класса, однозначно характеризует истинную физическую конфигурацию. Менее принципиальное, но практически важное требование состоит в том, что уравнение (1.23) не должно быть слишком сложным и давать достаточно явное решение $\omega(x)$, хотя бы в рамках теории возмущений.

Уравнение (1.23) представляет собой систему нелинейных уравнений относительно $\omega(x)$. Для локальных калибровочных условий это будет нелинейная система дифференциальных уравнений в частных производных. Например, для лоренцевой калибровки эта система уравнений выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu L_\mu &= \partial_\mu L_\mu - [\mathcal{A}_\mu, L_\mu] = -\partial_\mu \mathcal{A}_\mu; \\ L_\mu &= \omega^{-1} \partial_\mu \omega, \end{aligned} \quad (1.24)$$

и для малых $\mathcal{A}_\mu$ и $\alpha(x)$ переписывается в виде

$$\square \alpha - [\mathcal{A}_\mu, \partial_\mu \alpha] + \dots = -\partial_\mu \mathcal{A}_\mu, \quad (1.25)$$

где точками обозначены члены более высокого порядка по α . Уравнение (1.25) однозначно разрешимо относительно α в рамках теории возмущений, если оператор $\square = \partial_\mu \partial_\mu$ снабдить подходящими граничными условиями. Такие граничные условия возникают в процессе описания динамики полей Янга — Миллса и будут обсуждаться в гл. III. В то же время, вне рамок теории возмущений для больших полей $\mathcal{A}_\mu$, единственность решения уравнения (1.24) может пропасть. Обсуждение этой возможности выходит за рамки этой книги.

Необходимым условием разрешимости уравнений (1.23) является невырожденность соответствующего якобиана. Вариация калибровочного условия при бесконечно малом калибровочном преобразовании α задает линейный оператор M_Φ , действующий на α :

$$M_\Phi \alpha = \int \left[\frac{\delta \Phi(A, \psi; x)}{\delta \mathcal{A}_\mu(y)} (\partial_\mu \alpha(y) - [\mathcal{A}_\mu(y), \alpha(y)]) + \frac{\delta \Phi(A, \psi; x)}{\delta \psi(y)} \Gamma(\alpha(y)) \psi(y) \right] dy, \quad (1.26)$$

и играющий роль матрицы якобиана условия (1.23). Невырожденность оператора M_Φ

$$\det M_\Phi \neq 0 \quad (1.27)$$

и является необходимым условием однозначной разрешимости (1.23).

Для локальных калибровочных условий M_Φ является дифференциальным оператором, получающимся при линеаризации уравнения (1.23). Например, для лоренцева калибровочного условия $M_{\Phi_L} = M_L$ имеет вид

$$M_L \alpha = \square \alpha - \partial_\mu [\mathcal{A}_\mu, \alpha].$$

Этот оператор однозначно обратим в рамках теории возмущений, если дополнить его граничными условиями. Как мы уже говорили, такие условия будут обсуждаться в гл. III.

Условие (1.27) мы будем называть условием допустимости калибровочного условия, и оно неоднократно будет обсуждаться в дальнейшем.

§ 2. Геометрическая интерпретация поля Янга — Миллса

Описанная выше конструкция допускает красивую геометрическую интерпретацию, при которой поля Янга — Миллса играют роль, аналогичную символам Кристоффеля в теории тяготения. Подобно последним поля Янга — Миллса описывают параллельный перенос в зарядовом пространстве и определяют кривизну этого пространства. При этом поля $\psi(x)$ являются аналогами тензорных полей.

Естественный геометрический язык для описания этой аналогии дает теория расслоенных пространств. Полю Янга — Миллса в этой теории соответствует понятие связности в главном расслоении. Хотя теория расслоенных пространств дает наиболее адекватный язык для аксиоматизации классической теории поля, в этой книге, рассчитанной главным образом на читателя-физика, мы не будем им пользоваться. Отметим только, что общее понятие связности, эквивалентное полю Янга — Миллса, появилось в математической литературе лишь в 1950 году, т. е. почти одновременно с работой Янга и Миллса.

Поясним теперь, в каком смысле поля Янга — Миллса задают параллельный перенос. Пусть $\gamma(s)$ — контур в пространстве-времени, задаваемый уравнением

$$x_\mu = x_\mu(s). \quad (2.1)$$

Векторное поле $\dot{\gamma}(s)$ с компонентами

$$X_\mu = \frac{dx_\mu}{ds} \quad (2.2)$$

является касательным к кривой $\gamma(s)$ в каждой ее точке. Будем говорить, что поле $\psi(x)$ параллельно переносится вдоль $\gamma(s)$, если в каждой точке контура

$$\nabla_\mu \psi(x) |_{x=x(s)} X_\mu = 0, \quad (2.3)$$

т. е. ковариантная производная в касательном направлении равна нулю.

При параллельном переносе вдоль замкнутого контура поле $\psi(x)$, вообще говоря, изменяется. Вычислим это изменение для бесконечно-малого контура. Рассмотрим контур, имеющий вид параллелограмма с вершинами

$$(x, x + \Delta_1 x, x + \Delta_1 x + \Delta_2 x, x + \Delta_2 x).$$

Нетрудно убедиться, что если ковариантная производная вдоль контура равна нулю, то полное изменение $\psi(x)$ при обходе этого контура равно

$$\Delta_{12} \psi(x) = \Gamma(\mathcal{F}_{\mu\nu}) \psi(\Delta_1 x_\mu \Delta_2 x_\nu - \Delta_1 x_\nu \Delta_2 x_\mu), \quad (2.4)$$

где

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]. \quad (2.5)$$

Действительно, поскольку ковариантная производная вдоль стороны $(x, x + \Delta_1 x)$ равна нулю, приращение $\psi(x)$ при изменении x вдоль первого контура равно

$$\Delta_1 \psi(x) = \psi(x + \Delta_1 x) - \psi(x) = \partial_\mu \psi \Delta_1 x_\mu = \Gamma(\mathcal{A}_\mu) \psi(x) \Delta_1 x_\mu. \quad (2.6)$$

Проделав аналогичные выкладки для других сторон параллелограмма и пользуясь тем, что $\Gamma(\mathcal{A}_\mu)$ линейно зависит от $\mathcal{A}_\mu$ и $[\Gamma(\mathcal{A}_\mu), \Gamma(\mathcal{A}_\nu)] = \Gamma([\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu])$, получаем, что полное изменение $\psi(x)$ выражается формулой (2.4). Эта формула показывает, что $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ естественно назвать кривизной зарядового пространства. При калибровочных преобразованиях $\Delta\psi(x)$ меняется так же, как $\psi(x)$. Это следует из того, что при построении $\Delta\psi(x)$ мы использовали только ковариантную производную. Тогда из формулы (2.4) видно, что $\Gamma(\mathcal{F}_{\mu\nu}(x))$ преобразуется по закону

$$\Gamma(\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)) \rightarrow \Gamma(\omega(x)) \Gamma(\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)) \Gamma(\omega^{-1}(x)). \quad (2.7)$$

Тем самым само $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)$ при калибровочных преобразованиях преобразуется так:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x) \rightarrow \omega(x) \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) \omega^{-1}(x). \quad (2.8)$$

Если согласиться называть $\psi(x)$ вектором относительно калибровочных преобразований, то $\Gamma(\mathcal{F}_{\mu\nu}(x))$ является тензором второго ранга. Само же $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)$ иногда удобно считать вектором в присоединенном представлении.

Наш косвенный вывод формулы (2.8) подтверждается прямой проверкой, если воспользоваться явным выражением для $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)$ через $\mathcal{A}_\mu(x)$ (2.5) и законом преобразования $\mathcal{A}_\mu(x)$ (1.16). На этом мы заканчиваем краткое описание геометрического смысла полей Янга — Миллса: они описывают параллельный перенос векторов в зарядовом пространстве, а тензор $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)$ является тензором кривизны этого пространства. Читатель, знакомый с теорией тяготения, теперь уже, без сомнения, убедился в полной аналогии между $\mathcal{A}_\mu(x)$ и символами Кристоффеля и $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)$ и тензором кривизны гравитационного поля. Чтобы завершить эту аналогию, укажем,

что тензор $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)$ является коммутатором ковариантных производных

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x) = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] \quad (2.9)$$

и тождество Якоби

$$[[\nabla_\mu, \nabla_\nu], \nabla_\sigma] + \text{циклическая перестановка} = 0 \quad (2.10)$$

приводит к тождеству

$$\nabla_\sigma \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) + \text{циклическая перестановка} = 0, \quad (2.11)$$

где $\nabla_\sigma \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) = \partial_\sigma \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) - [\mathcal{A}_\sigma(x), \mathcal{F}_{\mu\nu}(x)]$, которое является аналогом тождества Бьянки в теории тяготения. Аналогичное рассмотрение можно провести и в случае абелевой группы $U(1)$. В этом случае

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x) = \partial_\nu \mathcal{A}_\mu(x) - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu(x) = i(\partial_\nu A_\mu(x) - \partial_\mu A_\nu(x)), \quad (2.12)$$

что, очевидно, совпадает с тензором напряженности электромагнитного поля. Трактовка $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)$ как кривизны в зарядовом пространстве, идущая от Фока и Германа Вейля, представляет собой наиболее естественный подход к геометризации электромагнитного поля. Многочисленные попытки связать это поле с геометрическими свойствами самого пространства-времени никогда не имели успеха.

В заключение этого параграфа скажем несколько слов о классической динамике поля Янга — Миллса. Наша задача — построить калибровочно-инвариантную функцию Лагранжа, совпадающую в случае абелевой группы $U(1)$ с лагранжианом электромагнитного поля

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4e^2} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} + \mathcal{L}_M(\psi, \nabla_\mu \psi), \quad (2.13)$$

где $\mathcal{L}_M$ описывает калибровочное инвариантное взаимодействие полей $\mathcal{A}_\mu(x)$ и $\psi(x)$ и получается из свободного лагранжиана полей ψ заменой обычных производных на ковариантные, а e играет роль электрического заряда. Эту формулу легко переписать в более привычном виде, если изменить нормировку полей

$$\mathcal{A}_\mu(x) \rightarrow e \mathcal{A}_\mu(x). \quad (2.14)$$

В этом случае множитель e^{-2} исчезает из первого слагаемого, но зато появляется в выражении для ковариантной производной

$$\nabla_\mu \rightarrow \partial_\mu - e\mathcal{A}_\mu.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться обоими способами нормировки поля $\mathcal{A}_\mu(x)$, не оговаривая это особо.

Естественным (и единственным) обобщением формулы (2.13) на случай простой неабелевой калибровочной группы является

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8g^2} \text{tr } \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} + \mathcal{L}_M(\psi, \nabla_\mu \psi). \quad (2.15)$$

Первое слагаемое можно переписать также в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a, \quad (2.16)$$

где $F_{\mu\nu}^a(x)$ — компоненты матрицы $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)$ по отношению к базису T^a . Очевидно, что этот лагранжиан инвариантен относительно калибровочных преобразований (1.15), (1.16). В случае полупростой группы общего вида лагранжиан содержит r произвольных констант g_i , $i = 1, \dots, r$, где r — число инвариантных простых сомножителей. В этом случае формула, аналогичная (2.16), принимает вид

$$\mathcal{L} = \sum_i -\frac{1}{4g_i^2} F_{\mu\nu}^{a_i} F_{\mu\nu}^{a_i}, \quad (2.17)$$

где i — номер простого сомножителя.

В отличие от электродинамики, лагранжиан (2.16) поля Янга — Миллса в пустоте (т.е. при отсутствии полей ψ) содержит наряду с квадратичными по полям членами также и члены более высокой степени. Это означает, что поля Янга — Миллса имеют нетривиальное самодействие. Другими словами, кванты поля Янга — Миллса сами обладают зарядами, взаимодействие которых они переносят. Основная специфика динамики поля Янга — Миллса связана именно с этим самодействием, так что ниже при рассмотрении общих вопросов мы часто будем ограничиваться моделью поля Янга — Миллса в пустоте.

Уравнения движения, возникающие из лагранжиана (2.16) для поля Янга — Миллса в пустоте, имеют вид

$$\nabla_\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} - [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{F}_{\mu\nu}] = 0, \quad (2.18)$$

и, будучи записанными через $\mathcal{A}_\mu$,

$$\square \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \partial_\mu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, (\partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu])] - \partial_\mu [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] = 0, \quad (2.19)$$

представляют собой систему уравнений второго порядка. Эти уравнения калибровочно-инвариантны в следующем смысле: если $\mathcal{A}_\mu$ решение (2.19), то $\mathcal{A}_\mu^\omega$ также решение для произвольной $\omega(x)$. Это означает, что стандартная параметризация решений через начальные данные $(\mathcal{A}_\mu(x, t), \partial_0 \mathcal{A}_\mu(x, t))$ при фиксированном t для системы (2.19) непригодна. После наложения калибровочного условия это препятствие устраняется, однако начальные данные уже не произвольны, а связаны калибровочными условиями.

Модели взаимодействия поля Янга — Миллса с полями материи будут рассмотрены в следующем параграфе.

§ 3. Динамические модели с калибровочными полями

Проще всего выглядит лагранжиан, описывающий взаимодействие поля Янга — Миллса со спинорными полями. Пусть мультиплет спинорных полей $\psi_k(x)$ реализует представление $\Gamma(\omega)$ простой компактной калибровочной группы Ω . Тогда лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM} + i\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \nabla_\mu \psi(x) - m\bar{\psi}(x) \psi(x). \quad (3.1)$$

Здесь мы используем следующие обозначения: $\mathcal{L}_{YM}$ — это уже знакомый нам лагранжиан поля Янга — Миллса в пустоте:

$$\mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{8g^2} \text{tr} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}. \quad (3.2)$$

В скалярном произведении двух спиноров подразумевается суммирование по индексам, отвечающим внутренним степеням свободы, например, массовый член можно записать в виде

$$m\bar{\psi}(x) \psi(x) = m\bar{\psi}_k(x) \psi_k(x). \quad (3.3)$$

Далее

$$(\nabla_\mu \psi(x))_k = \partial_\mu \psi_k(x) - (\Gamma(\mathcal{A}_\mu(x)))_{kl} \psi_l(x), \quad (3.4)$$

где $(\Gamma(\mathcal{A}_\mu))_{kl} = A_\mu^a (\Gamma(T^a))_{kl}$ и матрица $(\Gamma(T^a))_{kl}$, которую в дальнейшем будем обозначать просто Γ_{kl}^a , есть матрица генератора T^a в представлении, реализуемом полями $\psi(x)$. Тогда

$$\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \nabla_\mu \psi(x) = \bar{\psi}_k(x) \gamma_\mu (\partial_\mu \psi_k(x) - A_\mu^a(x) \Gamma_{kl}^a \psi_l(x)). \quad (3.5)$$

Например, пусть калибровочная группа $\Omega = SU(2)$, а поля $\psi(x)$ реализуют фундаментальное представление этой группы. Тогда

$$(\Gamma(\mathcal{A}_\mu))_{kl} = -\frac{i}{2} A_\mu^a (\tau^a)_{kl}, \quad (3.6)$$

где τ^a — матрицы Паули, и полный лагранжиан имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4g^2} (\partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a + \varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c)^2 + \\ & + i\bar{\psi} \gamma_\mu \left(\partial_\mu \psi + \frac{i}{2} A_\mu^a \tau^a \psi \right) - m\bar{\psi} \psi. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для случая, когда калибровочная группа определяется группой $SU(3)$, а спиноры $\psi(x)$ реализуют ее фундаментальное (спинорное) представление, аналогичный лагранжиан имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4g^2} (\partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a + f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c)^2 + \\ & + i\bar{\psi} \gamma_\mu \left(\partial_\mu \psi + \frac{i}{2} A_\mu^a \lambda^a \psi \right) - m\bar{\psi} \psi, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где f^{abc} — структурные константы группы $SU(3)$, а матрицы λ^a — хорошо известные матрицы Гелл-Манна

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Перенормировкой полей

$$A_\mu^a(x) \rightarrow g A_\mu^a(x) \quad (3.10)$$

лагранжианы (3.7), (3.8) приводятся к более привычному виду, где g входит только во взаимодействие.

Последний лагранжиан используется, например, в теории сильных взаимодействий. При этом спиноры ψ отождествляются с полями кварков, поля Янга — Миллса называют «глюонами», а внутреннее пространство в этом случае называют пространством цветов.

В рассмотренных выше примерах, когда калибровочная группа простая, все взаимодействия характеризуются одной константой связи. Такая универсальность взаимодействий является характерной особенностью теории Янга — Миллса.

Следующий полезный пример — взаимодействие поля Янга — Миллса со скалярным полем. Пусть мультиплет скалярных полей $\phi_k(x)$ реализует вещественное представление $\Gamma(\omega)$ простой компактной группы Ω . Тогда калибровочно-инвариантный лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM} + \frac{1}{2} \nabla_\mu \phi \nabla_\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi \phi - V(\phi), \quad (3.11)$$

где ковариантная производная $\nabla_\mu \phi$ строится так же, как и выше,

$$\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi - \Gamma(\mathcal{A}_\mu) \phi, \quad (3.12)$$

$\phi \phi$, как и прежде, обозначает скалярное произведение в зарядовом пространстве, а $V(\phi)$ — инвариантная по отношению к группе Ω форма третьей и четвертой степени по полям ϕ .

В случае, если $\Omega = SU(2)$, а поля ϕ реализуют присоединенное представление $\phi = \phi^a$, $a = 1, 2, 3$, соответствующая формула принимает вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM} + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^a - g \varepsilon^{abc} A_\mu^b \phi^c)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^a \phi^a - \lambda^2 (\phi^a \phi^a)^2, \quad (3.13)$$

где параметры m и λ^2 играют роль массы и константы контактного взаимодействия скалярных полей. Сам по себе лагранжиан (3.13) по-видимому мало интересен для физических приложений, однако, его незначительная на первый взгляд модификация приводит к чрезвычайно

интересной возможности описания массивных векторных полей в рамках теории Янга — Миллса. Этот механизм появления массы векторного поля называется *эффектом Хиггса*. К его обсуждению мы сейчас и перейдем.

Будем продолжать использовать в качестве примера калибровочную группу $SU(2)$. Рассмотрим сначала случай, когда скалярное поле принадлежит присоединенному представлению. В качестве функции Лагранжа возьмем

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM} + \frac{1}{2} (\nabla_\mu \varphi^a)^2 - \lambda^2 (\varphi^a \varphi^a - \mu^2)^2. \quad (3.14)$$

Этот лагранжиан отличается от рассматривавшегося ранее лагранжиана (3.13) постоянным слагаемым $-\lambda^2 \mu^4$ и знаком квадратичного по φ члена. На первый взгляд лагранжиан (3.14) описывает частицы мнимой массы и поэтому не имеет физического смысла. Однако такой вывод поспешен. Квадратичное по φ слагаемое играет роль массы только в том случае, если $\varphi = 0$ является положением устойчивого равновесия, т. е. минимумом потенциальной энергии. В нашем случае потенциальная энергия имеет вид

$$U(A_\mu, \varphi) = \int \left[\frac{1}{4g^2} F_{ik}^a F_{ik}^a + \frac{1}{2} \nabla_i \varphi^a \nabla_i \varphi^a + \lambda^2 (\varphi^a \varphi^a - \mu^2)^2 \right] d^3x, \\ i, k = 1, 2, 3, \quad (3.15)$$

и конфигурация $\varphi^a = 0$, $A_\mu^a = 0$ является седловой точкой. Соответствующее положение равновесия неустойчиво. Однако существуют и устойчивые положения равновесия; ими являются конфигурации, отвечающие нулевым A_μ^a и постоянным φ , имеющим фиксированную длину $\varphi^2 = \mu^2$. Такие A_μ , φ обращают в нуль все три положительных слагаемых, из которых состоит потенциальная энергия. (Заметим, что помимо этих конфигураций, минимумами, разумеется, являются и конфигурации, получающиеся из них в результате калибровочного преобразования. Однако в силу принципа относительности эти конфигурации не содержат новой физической информации, и мы их рассматривать не будем.)

Помимо этих трансляционно инвариантных минимумов потенциальная энергия имеет и другие, отвечающие,

например, монополям т' Хоофта — Полякова. Однако значения энергии для этих конфигураций выше, так, что они являются лишь локальными минимумами.

Для того чтобы определить настоящие массы, нужно разложить потенциальную энергию в ряд Тейлора в окрестности истинного минимума. В нашем случае положение равновесия вырождено. Минимальные конфигурации образуют двумерную сферу S^2 , точки которой соответствуют направлениям постоянного вектора φ . Эти направления будем обозначать буквой n и соответствующие φ снабжать индексом n , так что $\varphi_n = \mu n$. Вырождение снимается, если мы сужим пространство конфигураций и будем рассматривать лишь поля φ , асимптотически при больших $|x|$ совпадающие с одним из φ_n . Такой выбор разрушает, разумеется, инвариантность относительно преобразований $SU(2)$ с постоянными параметрами (изотопическую инвариантность). Можно убедиться, что это условие не противоречит динамике, и что теории, отвечающие различным выборам φ_n , физически эквивалентны. Читатель, знакомый с теорией твердого тела, несомненно, увидит здесь аналогию с теорией ферромагнетика, где для формулировки теории приходится выбирать направление вектора спонтанной намагниченности.

Выберем для определенности n направленным вдоль третьей оси: $n = (0, 0, 1)$. Тогда соответствующий вектор φ_n равен $(0, 0, \mu)$.

Переход к полям $\varphi(x)$ с нулевой асимптотикой на бесконечности

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi_n + \varphi(x) \quad (3.16)$$

делает нарушение изотопической симметрии явным и лагранжиан принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM} + \frac{1}{2} (\nabla_\mu \varphi^a)^2 + \frac{m_1^2}{2} [(A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2] + \\ + m_1 (A_\mu^1 \partial_\mu \varphi^2 - A_\mu^2 \partial_\mu \varphi^1) + g m_1 [\varphi^3 [(A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2] - \\ - A_\mu^3 [\varphi^1 A_\mu^1 + \varphi^2 A_\mu^2]] - \frac{m_2^2}{2} (\varphi^3)^2 - \frac{m_2^2 g}{2 m_1} \varphi^3 (\varphi^a)^2 - \frac{m_2^2 g^2}{8 m_1^2} (\varphi^a \varphi^a)^2, \\ m_1 = \mu g; \quad m_2 = 2 \sqrt{2} \lambda \mu. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Хотя изотопическая инвариантность нами явно нарушена, лагранжиан и граничные условия инвариантны относительно локальных калибровочных преобразований с функциями $\omega(x)$, стремящимися к единице на бесконечности. Приведем явный вид калибровочных преобразований в новых переменных, ограничиваясь инфинитезимальными преобразованиями

$$\delta\varphi^a(x) = -g\varepsilon^{abc}\varphi^b(x)\alpha^c(x) - m_1\varepsilon^{a3c}\alpha^c(x). \quad (3.18)$$

Чтобы проанализировать спектр масс, порождаемый лагранжианом (3.17), необходимо выбрать представителей в калибровочно эквивалентных классах полей $\mathcal{A}_\mu(x)$, $\varphi(x)$, т. е. фиксировать калибровку. Удобно в качестве калибровочного условия выбрать

$$\varphi^1(x) = 0; \quad \varphi^2(x) = 0; \quad \partial_\mu A_\mu^3(x) = 0. \quad (3.19)$$

Можно проверить, что для достаточно малых $\varphi^3(x)$ условие допустимости выполнено. Действительно,

$$\delta(\partial_\mu A_\mu^3) = \square \alpha^3 - g\varepsilon^{3bc}\partial_\mu [A_\mu^b \alpha^c] \quad (3.20)$$

и $\delta\varphi^{1,2}$ определяются формулой (3.18). В результате оператор M , соответствующий нашей калибровке, имеет вид

$$M \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & -g\varphi^3 - m_1, & g\varphi^2 \\ -g\varphi^3 - m_1 & 0, & -g\varphi^1 \\ \partial_\mu A_\mu^2 + A_\mu^2 \partial_\mu, & -A_\mu^1 \partial_\mu - \partial_\mu A_\mu^1, & \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

При малых φ детерминант оператора M представляется в виде

$$\det M = m_1^2 \det \square + O(\varphi). \quad (3.22)$$

Поскольку первое слагаемое отлично от нуля, в рамках теории возмущений $\det M \neq 0$, и условие допустимости выполнено.

Выпишем теперь явно квадратичную форму, определяющую спектр масс:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & -\frac{1}{4}(\partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a)^2 + \frac{m_1^2}{2}((A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2) + \\ & + \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi^3 \partial_\mu \varphi^3 - \frac{m_2^2}{2}(\varphi^3)^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Как видно, в классическом приближении наша теория описывает два массивных векторных поля, одно безмассовое векторное поле и одну массивную скалярную частицу. Таким образом, действительно, два векторных поля приобрели массу, зато из списка частиц пропали кванты двух скалярных полей.

Нетрудно построить $SU(2)$ калибровочно-инвариантную модель, в которой все три векторных поля приобретают ненулевую массу. Для этого нужно рассмотреть мультиплет комплексных скалярных полей в двумерном (спинорном) представлении

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi^+ = (\varphi_1^*, \varphi_2^*). \quad (3.24)$$

Калибровочно-инвариантный лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM} + (\nabla_\mu \varphi)^+ \nabla_\mu \varphi - \lambda^2 (\varphi^+ \varphi - \mu^2)^2, \quad (3.25)$$

где

$$\nabla_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + \frac{i}{2} g \tau^a A_\mu^a \varphi, \quad (3.26)$$

и калибровочное преобразование полей φ задается формулой

$$\delta \varphi(x) = \frac{1}{2i} g \tau^a \alpha^a(x) \varphi(x). \quad (3.27)$$

Так же, как и в предыдущем случае, устойчивый экстремум отвечает постоянному φ , такому, что

$$\varphi^+ \varphi = \mu^2. \quad (3.28)$$

Мы видим, что в этом случае многообразие устойчивых экстремумов является трехмерной сферой S^3 . Чтобы снять вырождение, выберем в качестве минимума

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Можно проверить, что условие

$$\varphi_1(x) = 0; \quad \text{Im } \varphi_2(x) = 0 \quad (3.30)$$

является допустимой калибровкой. В этой калибровке остается только одно скалярное поле $\text{Re } \varphi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma(x)$.

Переходя к полям с нулевой асимптотикой на бесконечности,

$$\sigma(x) \rightarrow \sqrt{2} \mu + \sigma(x), \quad (3.31)$$

получаем лагранжиан

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{m_1^2}{2} A_\mu^a A_\mu^a + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial_\mu \sigma - \frac{1}{2} m_2^2 \sigma^2 + \\ & + \frac{m_1 g}{2} \sigma A_\mu^a A_\mu^a + \frac{g^2}{8} \sigma^2 A_\mu^a A_\mu^a - \frac{g m_2^2}{4 m_1} \sigma^3 - \frac{g^2 m_2^2}{32 m_1^2} \sigma^4, \\ m_1 = & \frac{\mu g}{\sqrt{2}}; \quad m_2 = 2\lambda\mu, \end{aligned} \quad (3.32)$$

описывающий взаимодействие трех массивных векторных полей и одного массивного скалярного поля.

Описанный только что механизм будет использован в дальнейшем для построения калибровочно-инвариантных объединенных моделей слабых и электромагнитных взаимодействий. На этом мы заканчиваем рассмотрение классической теории Янга — Миллса и переходим к его квантованию.

Глава II



КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ В ТЕРМИНАХ КОНТИНУАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА

Существует несколько подходов к квантованию теории поля. Наиболее часто используется операторный метод квантования, при котором классическим полевым конфигурациям соответствуют операторы, удовлетворяющие каноническим перестановочным соотношениям. Существует, однако, и другой подход, в котором квантовая динамика описывается континуальным интегралом — суммой по всем полевым конфигурациям. При помощи этого подхода Фейнман впервые сформулировал последовательную явно релятивистски инвариантную теорию возмущений для квантовой электродинамики. Этот формализм оказывается наиболее удобным для квантования калибровочных полей, так как принцип относительности учитывается в нем наиболее просто: следует интегрировать не по всем полевым конфигурациям, а только по калибровочно-эквивалентным классам.

В этой главе мы расскажем об общем формализме континуального интеграла. Применению этого формализма к калибровочным полям будет посвящена следующая глава.

§ 1. Континуальный интеграл по фазовому пространству

Мы начнем с того, что продемонстрируем основные идеи метода континуального интеграла на примере нерелятивистской квантовой механики. Начнем со случая системы с одной степенью свободы.

Пусть p и q — канонические импульс и координата частицы ($-\infty < p < \infty$, $-\infty < q < \infty$). При операторном квантовании им соответствуют операторы P , Q , для которых чаще всех употребляют две реализации —

координатную и импульсную. В координатном представлении эти операторы и их собственные функции имеют вид

$$\begin{aligned} Q &= x; & P &= \frac{1}{i} \frac{d}{dx}; \\ |q\rangle &= \delta(x - q); & |p\rangle &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} e^{ipx}; \\ Q|q\rangle &= q|q\rangle; & P|p\rangle &= p|p\rangle. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Функции перехода из координатного представления в импульсное и обратно даются формулами

$$\langle p|q\rangle = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} e^{-ipq}; \quad \langle q|p\rangle = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} e^{ipq}. \quad (1.2)$$

Динамика системы описывается при помощи функции Гамильтона $h(p, q)$. В квантовой механике ей соответствует оператор Гамильтона

$$H = h(P, Q), \quad (1.3)$$

где подразумевается определенный рецепт упорядочения некоммутирующих операторных аргументов P и Q . Мы не будем здесь обсуждать общую проблему упорядочения и вернемся к ней после того, как введем понятие континуального интеграла. Формальные рассуждения, которые мы будем при этом использовать, не зависят от конкретного выбора упорядочения. Для определенности будем считать, что все операторы P стоят слева от всех операторов Q .

При таком соглашении матричный элемент гамильтониана H между состояниями $\langle p|$, $|q\rangle$ явно выражается через классическую функцию Гамильтона

$$\langle p|H|q\rangle = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} e^{-ipq} h(p, q). \quad (1.4)$$

Наша задача — вычислить оператор эволюции

$$U(t'', t') = \exp\{-iH(t'' - t')\}. \quad (1.5)$$

Будем вычислять его матричный элемент

$$\begin{aligned} \langle q''|U(t'', t')|q'\rangle &= \\ &= \langle q''|\exp\{-iH(t'' - t')\}|q'\rangle = \langle q'', t''|q', t'\rangle, \end{aligned} \quad (1.6)$$

который можно назвать ядром оператора U в координатном представлении.

Для малых $t'' - t'$ это просто сделать на основании предыдущей формулы. Действительно, в этом случае

$$\exp \{-iH(t'' - t')\} \cong 1 - iH(t'' - t'), \quad (1.7)$$

и матричный элемент $\langle p | U(t'', t') | q \rangle$ приблизительно равен

$$\begin{aligned} \langle p | U(t'', t') | q \rangle &\cong \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} e^{-ipq} (1 - ih(p, q)(t'' - t')) \cong \\ &\cong \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \exp \{-ipq - ih(p, q)(t'' - t')\}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ядро оператора $U(t'', t')$ в координатном представлении легко вычисляется с помощью функции перехода

$$\begin{aligned} \langle q'' | U(t'', t') | q' \rangle &= \int \langle q'' | p \rangle \langle p | U(t'', t') | q' \rangle dp = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \exp \{ip(q'' - q') - ih(p, q')(t'' - t')\} dp. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Для конечного интервала $t'' - t'$ эта формула, разумеется, не верна. В этом случае можно поступить так. Разобьем интервал $t'' - t'$ на N частей, считая, что

$$\Delta t = \frac{t'' - t'}{N} \quad (1.10)$$

достаточно мало, чтобы можно было воспользоваться предыдущей формулой для оператора $\exp \{-iH\Delta t\}$. Оператор $U(t'', t')$ выражается через $\exp \{-iH\Delta t\}$ формулой

$$U(t'', t') = (\exp \{-iH\Delta t\})^N. \quad (1.11)$$

Заменяя каждый сомножитель справа его ядром и интегрируя по всем промежуточным состояниям, получаем

$$\begin{aligned} \langle q'' | U(t'', t') | q' \rangle &\cong \int \exp \{i[p_N(q_N - q_{N-1}) + \dots \\ &\dots + p_1(q_1 - q_0)] - i[h(p_N, q_{N-1}) + \dots + h(p_1, q_0)]\Delta t\} \times \\ &\times \frac{dp_N}{2\pi} \frac{dp_{N-1} dq_{N-1}}{2\pi} \dots \frac{dp_1 dq_1}{2\pi}; \end{aligned} \quad (1.12)$$

здесь $q_N = q''$, $q_0 = q'$.

Перейдем теперь к пределу $N \rightarrow \infty$, $\Delta t \rightarrow 0$. При этом число переменных интегрирования также стремится

к бесконечности, и можно считать, что в пределе мы интегрируем по значениям функций $p(t)$, $q(t)$ при всех t из интервала $t' < t < t''$. На функцию $q(t)$ наложено условие

$$q(t') = q'; \quad q(t'') = q''. \quad (1.13)$$

Показатель экспоненты в этом пределе переходит в интеграл

$$A_{t'}^{t''} = \int_{t'}^{t''} (p(t) \dot{q}(t) - h(p(t), q(t))) dt, \quad (1.14)$$

т. е. в классическое действие на интервале (t', t'') . Таким образом, мы получаем основной результат: матричный элемент оператора эволюции получается интегрированием фейнмановского функционала $\exp\{iA_{t'}^{t''}\}$ по всем траекториям $p(t)$, $q(t)$ в фазовом пространстве, имеющим фиксированные значения q' и q'' при $t = t'$ и $t = t''$ соответственно. Мера интегрирования формально может быть записана в виде

$$\frac{dp''}{2\pi} \prod_t \frac{dp(t) dq(t)}{2\pi}, \quad (1.15)$$

т. е. выражается через произведение мер Лиувилля по всем t . Таким образом, мы построили квантовомеханическое выражение целиком в классических терминах — действия и меры Лиувилля.

Такой же окончательный ответ

$$\begin{aligned} \langle q'', t'' | q', t' \rangle &= \langle q'' | U(t'', t') | q' \rangle = \\ &= \int \exp \left\{ i \int_{t'}^{t''} (p\dot{q} - h(p, q)) dt \right\} \prod_t \frac{dp dq}{2\pi} \end{aligned} \quad (1.16)$$

получился бы, если бы мы пользовались другим упорядочением операторных сомножителей. На первый взгляд, нам удалось однозначно построить квантовую механику целиком в терминах классических объектов, являющихся каноническими инвариантами. В действительности это не может быть верным, так как на квантовую механику не переносится действие полной группы канонических преобразований классической механики. Разреше-

ние кажущегося парадокса состоит в том, что мы фактически не дали определения континуального интеграла во внутренних терминах, без ссылок на предельный переход. Чтобы вложить реальный смысл в континуальный интеграл, нужно задать конкретный способ его вычисления, что по сути дела эквивалентно выбору упорядочения. В теории поля один из таких способов (на сегодня единственный) дает теория возмущений. Строгое определение континуального интеграла в этом случае будет дано в дальнейшем. Пока же будем работать с континуальным интегралом, обращаясь с ним как с конечномерным. Мы надеемся, что формальные манипуляции с континуальным интегралом, которыми мы будем заниматься ниже, выработают у читателя достаточно ясное интуитивное представление об этом объекте.

Сам Фейнман использовал несколько иную форму континуального интеграла, а именно интеграл по траекториям в пространстве координат. Фейнмановская формула естественно возникает, если гамильтониан квадратичен по импульсам:

$$h = \frac{p^2}{2m} + v(q). \quad (1.17)$$

Действительно, в этом случае интегрирование по переменным p можно провести в явном виде. В интеграле

$$\int \exp \left\{ i \int_{t'}^{t''} \left(p \dot{q} - \frac{p^2}{2m} - v(q) \right) dt \right\} \prod_t \frac{dp dq}{2\pi} \quad (1.18)$$

нужно сделать сдвиг:

$$p(t) \rightarrow p(t) + m\dot{q}. \quad (1.19)$$

После этого интегрирование по p и q разделяется и мы получаем ответ

$$\langle q'', t'' | q', t' \rangle = \frac{1}{N} \int \exp \left\{ i \int_{t'}^{t''} \left(\frac{\dot{q}^2}{2m} - v(q) \right) dt \right\} \prod_t dq, \quad (1.20)$$

где

$$N^{-1} = \int \exp \left\{ -i \int_{t'}^{t''} \frac{p^2}{2m} dt \right\} \prod_t \frac{dp}{2\pi}. \quad (1.21)$$

Нормирующий множитель N , очевидно, не зависит от q' и q'' , и является функцией времени $t'' - t'$. Обычно этот множитель включают в определение меры. Из приведенного вывода ясно, что вторая форма континуального интеграла является менее общей. Она справедлива лишь для гамильтонианов, квадратичных по импульсам. Тем не менее для большинства физически интересных задач гамильтониан обладает этим свойством и поэтому для них обе формы эквивалентны.

Случай системы со многими степенями свободы можно рассмотреть аналогично. Используя векторные обозначения

$$\begin{aligned} p &= (p_1, \dots, p_n), \quad q = (q^1, \dots, q^n), \\ p\dot{q} &= \sum_i p_i \dot{q}^i; \quad \frac{dp \, dq}{2\pi} = \prod_i \frac{dp_i \, dq^i}{2\pi}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

мы можем и для этого случая сохранить формулы (1.16), (1.20).

С точки зрения гамильтоновой динамики квантовая теория поля является системой с бесконечным числом степеней свободы. Например, в случае скалярного нейтрального поля, описываемого лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - V(\phi), \quad (1.23)$$

точками фазового пространства являются пары функций $\phi(\mathbf{x})$, $\pi(\mathbf{x})$, образующие бесконечный набор канонических переменных. Аргумент $\mathbf{x}$ играет роль номера этих переменных. Скобки Пуассона задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \{\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})\} &= 0; \quad \{\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})\} = 0; \\ \{\phi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})\} &= \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Существует много представлений для операторов $\phi(\mathbf{x})$ и $\pi(\mathbf{x})$, отвечающих $\phi(\mathbf{x})$ и $\pi(\mathbf{x})$ после квантования. Одно из них, координатное, является диагональным для $\phi(\mathbf{x})$; векторы состояния являются функционалами $\Phi(\phi(\mathbf{x}))$ от $\phi(\mathbf{x})$ и

$$\phi(\mathbf{x}) \Phi(\phi) = \phi(\mathbf{x}) \Phi(\phi); \quad \pi(\mathbf{x}) \Phi(\phi) = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \phi(\mathbf{x})} \Phi(\phi). \quad (1.25)$$

Чаще используют представления в пространстве Фока, о которых мы упомянем ниже. Гамильтониан имеет вид

$$H(\pi, \varphi) = \int \left[\frac{\pi^2(\mathbf{x})}{2} + \frac{1}{2} \partial_k \varphi(\mathbf{x}) \partial_k \varphi(\mathbf{x}) + \frac{m^2}{2} \varphi^2(\mathbf{x}) + V(\varphi) \right] d^3x. \quad (1.26)$$

Нетрудно убедиться, что гамильтоновы уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varphi(\mathbf{x}) &= \frac{\delta H}{\delta \pi(\mathbf{x})} = \pi(\mathbf{x}); \\ \frac{d}{dt} \pi(\mathbf{x}) &= - \frac{\delta H}{\delta \varphi(\mathbf{x})} = \Delta \varphi - V'(\varphi) - m^2 \varphi \end{aligned} \quad (1.27)$$

действительно совпадают с обычным уравнением для скалярного поля

$$\square \varphi + m^2 \varphi = -V'(\varphi). \quad (1.28)$$

Полученные выше формулы, выражающие оператор эволюции в виде континуального интеграла, непосредственно переносятся и на этот случай. В координатном представлении имеем:

$$\begin{aligned} \langle \varphi''(\mathbf{x}), t'' | \varphi'(\mathbf{x}), t' \rangle &= \langle \varphi''(\mathbf{x}) | \exp \{ -iH(t'' - t') \} | \varphi'(\mathbf{x}) \rangle = \\ &= \int \exp \left\{ i \int_{t'}^{t''} \left[\pi(\mathbf{x}, t) \partial_t \varphi(\mathbf{x}, t) - \frac{\pi^2(\mathbf{x}, t)}{2} - \frac{1}{2} (\partial_k \varphi(\mathbf{x}, t))^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{m^2 \varphi^2(\mathbf{x}, t)}{2} - V(\varphi(\mathbf{x}, t)) \right] d^3x dt \right\} \prod_{\mathbf{x}, t} \frac{d\pi(\mathbf{x}, t) d\varphi(\mathbf{x}, t)}{2\pi} = \\ &= \frac{1}{N} \int \exp \left\{ i \int \mathcal{L}(\varphi) d^4x \right\} \prod_{\mathbf{x}} d\varphi(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$t' < x_0 < t''; \quad \varphi(\mathbf{x}, t'') = \varphi''(\mathbf{x}); \quad \varphi(\mathbf{x}, t') = \varphi'(\mathbf{x}).$$

Во второй формуле мы использовали релятивистские обозначения $x = (\mathbf{x}, t)$. Единственное, что в ней не лоренцинвариантно, это ограничение интеграла по времени интервалом $t' \leq x_0 \leq t''$. Впоследствии нас будет интересовать оператор эволюции для бесконечного проме-

жутка времени, поскольку именно он нужен для построения матрицы рассеяния, которая определяется формулой

$$S = \lim_{\substack{t'' \rightarrow \infty \\ t' \rightarrow -\infty}} e^{iH_0 t''} e^{-iH(t''-t')} e^{-iH_0 t'}, \quad (1.30)$$

где H_0 — оператор энергии свободного движения, получающийся из H , если опустить член взаимодействия $V(\varphi)$.

Для вычисления этого предела использованное ранее представление неудобно, так как выражение для оператора $\exp\{-iH_0 t\}$ в этом представлении достаточно громоздко. Более удобным является так называемое голоморфное представление, в котором диагональны операторы рождения. Обсуждению этого представления посвящается следующий параграф.

§ 2. Континуальный интеграл в голоморфном представлении

Начнем опять со случая одной степени свободы. Рассмотрим в качестве примера гармонический осциллятор с функцией Гамильтона

$$h(p, q) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 q^2}{2}. \quad (2.1)$$

Введем комплексные координаты

$$a^* = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega q - ip); \quad a = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\omega q + ip); \quad (2.2)$$

функция Гамильтона в этих координатах имеет вид $h = \omega a^* a$.

В квантовой механике им соответствуют сопряженные друг другу операторы, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[a, a^*] = 1. \quad (2.3)$$

Эти перестановочные соотношения имеют представление в пространстве аналитических функций $f(a^*)$ со скалярным произведением

$$(f_1, f_2) = \int (f_1(a^*))^* f_2(a^*) e^{-a^* a} \frac{da^* da}{2\pi i}. \quad (2.4)$$

Операторы a^* , a действуют следующим образом:

$$a^* f(a^*) = a^* f(a^*); \quad a f(a^*) = \frac{d}{da^*} f(a^*). \quad (2.5)$$

Здесь использовано соотношение

$$\frac{da^* da}{2\pi i} = \frac{dp dq}{2\pi}. \quad (2.6)$$

Введенное скалярное произведение положительно определено. Действительно, произвольная аналитическая функция $f(a^*)$ является линейной комбинацией одночленов

$$\psi_n(a^*) = \frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}}. \quad (2.7)$$

Простое вычисление показывает, что эти одночлены ортонормированы:

$$\begin{aligned} \langle \psi_n | \psi_m \rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \int a^n (a^*)^m e^{-a^*a} \frac{da^* da}{2\pi i} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{m!n!}} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \rho^{n+m} e^{i\theta(n-m)} e^{-\rho^2} = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.8)$$

откуда следует положительная определенность скалярного произведения.

Ясно также, что операторы a^* , a сопряжены друг другу. Действительно, пользуясь тем, что

$$a^* e^{-a^*a} = -\frac{d}{da} e^{-a^*a}; \quad \frac{d}{da} f(a^*) = 0, \quad (2.9)$$

имеем, интегрируя по частям,

$$\begin{aligned} (f_1, a^* f_2) &= \int (f_1(a^*))^* a^* f_2(a^*) e^{-a^*a} \frac{da^* da}{2\pi i} = \\ &= \int \left[\frac{d}{da} ((f_1(a^*))^* f_2(a^*)) \right] e^{-a^*a} \frac{da^* da}{2\pi i} = \\ &= \int \left(\frac{d}{da^*} f_1(a^*) \right)^* f_2(a^*) e^{-a^*a} \frac{da^* da}{2\pi i} = (a f_1, f_2). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Можно ввести два способа описания произвольных операторов в этом представлении. Во-первых, произвольный оператор $\mathbf{A}$ можно представить в виде интегрального оператора с ядром $A(a^*, a)$:

$$(\mathbf{A}f)(a^*) = \int A(a^*, \alpha) f(\alpha^*) e^{-\alpha^* \alpha} \frac{d\alpha^* d\alpha}{2\pi i}. \quad (2.11)$$

Ядро $A(a^*, a)$ выражается через матричные элементы оператора $\mathbf{A}$ в базисе ψ_n : если

$$A_{nm} = \langle \psi_n | \mathbf{A} | \psi_m \rangle, \quad (2.12)$$

то

$$A(a^*, a) = \sum_{n, m} A_{nm} \frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}} \frac{a^m}{\sqrt{m!}}. \quad (2.13)$$

Эта формула определяет $A(a^*, a)$ как аналитическую функцию двух комплексных переменных a^* , a , которые не обязательно сопряжены друг другу.

Произведению операторов $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ соответствует свертка ядер

$$(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2)(a^*, a) = \int A_1(a^*, \alpha) A_2(\alpha^*, a) e^{-\alpha^* \alpha} \frac{d\alpha^* d\alpha}{2\pi i}. \quad (2.14)$$

Второе представление для операторов — это просто задание оператора в виде нормально упорядоченного полинома по операторам a^* , a . Под нормальным произведением мы понимаем произведение, в котором все операторы a^* стоят слева от операторов a . Посмотрим, как выглядит ядро оператора $\mathbf{A}$, заданного в виде суммы по нормальным произведениям:

$$\mathbf{A} = \sum_{n, m} K_{nm} (a^*)^n a^m. \quad (2.15)$$

Сопоставим такому оператору функцию

$$K(a^*, a) = \sum_{n, m} K_{nm} (a^*)^n a^m, \quad (2.16)$$

которую будем называть нормальным символом оператора $\mathbf{A}$. Тогда ядро $A(a^*, a)$ оператора $\mathbf{A}$ связано с $K(a^*, a)$ формулой

$$A(a^*, a) = e^{a^* a} K(a^*, a). \quad (2.17)$$

Для проверки рассмотрим в качестве оператора A одночлен

$$A = (a^*)^k a^l, \quad (2.18)$$

так что

$$K(a^*, a) = (a^*)^k a^l \quad (2.19)$$

и

$$\begin{aligned} A_{nm} &= \langle \psi_n | A | \psi_m \rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \int \left(\left(\frac{d}{da^*} \right)^k (a^*)^n \right)^* \left(\left(\frac{d}{da^*} \right)^l (a^*)^m \right) e^{-a^*a} \frac{da^* da}{2\pi i} = \\ &= \sqrt{n(n-1)\dots(n-k+1)} \sqrt{m(m-1)\dots(m-l+1)} \times \\ &\quad \times \theta(n \geq k) \theta(m \geq l) \delta_{n-k, m-l}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где

$$\theta(n \geq k) = \begin{cases} 0, & \text{если } n < k, \\ 1, & \text{если } n \geq k. \end{cases}$$

Построим теперь $A(a^*, a)$ по формуле (2.13). Имеем

$$\begin{aligned} A(a^*, a) &= \sum_{n, m} A_{nm} \frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}} \frac{a^m}{\sqrt{m!}} = (a^*)^k a^l \sum \frac{(a^*)^n a^n}{n!} = \\ &= (a^*)^k a^l \exp \{a^*a\}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Формула (2.17) проверена. Формулы (2.17), (2.14) позволяют просто построить оператор эволюции в виде континуального интеграла по функциям $a^*(t)$, $a(t)$. Соответствующий вывод фактически повторяет рассуждения из § 1.

Пусть гамильтониан задан в виде

$$H = h(a^*, a), \quad (2.22)$$

где подразумевается нормальное упорядочение. Тогда ядро $U(a^*, a, \Delta t)$ оператора эволюции

$$U(\Delta t) = \exp \{-iH\Delta t\} \quad (2.23)$$

для малых Δt выглядит следующим образом:

$$U(a^*, a, \Delta t) = \exp \{a^*a - ih(a^*, a)\Delta t\}. \quad (2.24)$$

Для произвольного интервала $t'' - t' = N\Delta t$ мы должны взять свертку N таких ядер

$$U(a^*, a; t'' - t') = \int \exp \{ [a_N^* a_{N-1} - a_{N-1}^* a_{N-1} + \dots - a_1^* a_1 + a_1^* a_0] - i [h(a_N^*, a_{N-1}) + \dots + h(a_1^*, a_0)] \Delta t \} \prod_{k=1}^{N-1} \frac{da_k^* da_k}{2\pi i}, \quad (2.25)$$

где мы обозначили $a_0 = a$, $a_N = a^*$. Формальный предел при $\Delta t \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ выражается в виде

$$U(a^*, a; t'' - t') = \int \exp \{ a^*(t'') a(t'') \} \times \times \exp \left\{ \int_{t'}^{t''} (-a^* \dot{a} - i h(a^*, a)) dt \right\} \prod_t \frac{da^* da}{2\pi i}, \quad (2.26)$$

или, после симметризации по a^* , a :

$$U(a^*, a; t'' - t') = \int \exp \left\{ \frac{1}{2} (a^*(t'') a(t'') + a^*(t') a(t')) \right\} \times \times \exp \left\{ i \int_{t'}^{t''} \left[\frac{1}{2i} (\dot{a}^* a - a^* \dot{a}) - h(a^*, a) \right] dt \right\} \prod_t \frac{da^* da}{2\pi i}. \quad (2.27)$$

Здесь считается, что $a^*(t'') = a^*$, $a(t') = a$. Заметим что последняя формула мало отличается от соответствующей формулы (1.16) предыдущего параграфа. В обеих этих формулах под знаком функционального интеграла стоит функционал $\exp \{ i \times \text{действие} \}$, и интегрирование ведется по произведению мер Лиувилля по фазовому пространству. Дополнительный функционал

$$\exp \left\{ \frac{1}{2} (a^*(t'') a(t'') + a^*(t') a(t')) \right\} \quad (2.28)$$

в формуле (2.27) отражает различие граничных условий на траектории, по которым мы интегрируем: в случае (1.16) мы фиксируем при $t = t'$ и $t = t''$ значение одной и той же функции $q(t)$, в то время как в случае (2.27) при $t = t'$ фиксировано значение функции $a(t)$, а при

$t = t''$, функции $a^*(t)$. Подчеркнем, что переменные $a^*(t'')$ и $a(t'')$ являются независимыми; по $a(t'')$ мы интегрируем, а $a^*(t'')$ фиксировано. Аналогично, $a^*(t')$ является переменной интегрирования, а $a(t')$ фиксировано.

В случае гармонического осциллятора интеграл (2.27) легко вычисляется, так как подынтегральная функция представляет собой экспоненту от неоднородной квадратичной формы. Такие интегралы мы будем называть гауссовыми. Мы воспользуемся известным свойством гауссова интеграла, согласно которому он равен подынтегральному выражению, вычисленному в точке экстремума показателя экспоненты. Условие экстремума в нашем случае совпадает с классическим уравнением движения

$$\dot{a}^* - i\omega a^* = 0; \quad \dot{a} + i\omega a = 0; \quad a^*(t'') = a^*; \quad a(t') = a, \quad (2.29)$$

так как

$$\begin{aligned} \delta(a^*(t'') a(t'')) + \int_{t'}^{t''} (-a^* \dot{a} - i\omega a^* a) dt &= \\ &= \int_{t'}^{t''} (\delta a (\dot{a}^* - i\omega a^*) - \delta a^* (\dot{a} + i\omega a)) dt \end{aligned} \quad (2.30)$$

при $\delta a^*|_{t''} = 0$; $\delta a|_{t'} = 0$.

Уравнения (2.29) тривиально решаются

$$a(t) = e^{i\omega(t'-t)} a; \quad a^*(t) = e^{i\omega(t-t'')} a^*. \quad (2.31)$$

Обозначая соответствующий оператор эволюции через U_0 , получаем

$$U_0(a^*, a; t'' - t') = \exp\{a^* a e^{i\omega(t'-t'')}\}. \quad (2.32)$$

Если $f(a^*)$ — произвольная функция, то

$$U_0(t) f(a^*) = \int \exp\{a^* a e^{-i\omega t}\} f(a^*) e^{-a^* a} \frac{da^* da}{2\pi i} = f(a^* e^{-i\omega t}). \quad (2.33)$$

Эта формула наглядно демонстрирует удобство голоморфного представления для гармонического осциллятора. В этом представлении эволюция произвольного состояния сводится к замене аргумента

$$a^* \rightarrow a^* e^{-i\omega t}. \quad (2.34)$$

Это свойство очень полезно для теории поля, поскольку свободный гамильтониан в этом случае представляет собой сумму гамильтонианов бесконечного набора осцилляторов.

§ 3. Производящий функционал для S -матрицы в теории поля

Голоморфное представление для теории поля вводится через комплексные амплитуды $a^*(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k})$. Канонические переменные $\varphi(\mathbf{x})$ и $\pi(\mathbf{x})$ выражаются через них следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int (a^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} + a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}}, \\ \pi(\mathbf{x}) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int (a^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} - a(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}) i \sqrt{\frac{\omega}{2}} d^3k, \\ k_0 &= \omega = (k^2 + m^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

При квантовании амплитуды $a^*(\mathbf{k})$, $a(\mathbf{k})$ приобретают смысл операторов рождения и уничтожения.

Свободный гамильтониан H_0 выражается через a^* , a следующим образом:

$$H_0 = \int \omega(\mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) d^3k \quad (3.2)$$

и представляет собой сумму энергий бесконечного набора осцилляторов. Аргумент $\mathbf{k}$ играет роль номера осциллятора, а $\omega(\mathbf{k})$ — его частоты. Полный гамильтониан H помимо члена H_0 содержит взаимодействие $V(a^*, a)$, которое получается при подстановке в $\int V(\varphi) d^3x$ функции $\varphi(\mathbf{x})$ в виде (3.1). Оператор эволюции $U(t'', t')$ оп-

ределяется ядром $U(a^*(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}), t'' - t')$, которое выражается через континуальный интеграл

$$\begin{aligned}
 U(a^*(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}), t'' - t') = & \\
 = \int \exp \left\{ \int d^3k a^*(\mathbf{k}, t'') a(\mathbf{k}, t'') + \int_{t'}^{t''} [-iV(a^*, a) + \right. & \\
 + \int d^3k (-a^*(\mathbf{k}, t) \dot{a}(\mathbf{k}, t) - i\omega a^*(\mathbf{k}, t) a(\mathbf{k}, t))] dt \Big\} \times & \\
 \times \prod_{t, \mathbf{k}} \frac{da^*(\mathbf{k}, t) da(\mathbf{k}, t)}{2\pi i}; \quad a^*(\mathbf{k}, t'') = a^*(\mathbf{k}); \quad a(\mathbf{k}, t') = a(\mathbf{k}). &
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

От этой формулы легко перейти к S-матрице. Для этого заметим, что для произвольного оператора A с ядром $A(a^*(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}))$ оператор

$$e^{iH_0 t''} A e^{-iH_0 t'} \tag{3.4}$$

имеет ядро

$$A(a^*(\mathbf{k}) e^{i\omega t''}, a(\mathbf{k}) e^{-i\omega t'}). \tag{3.5}$$

Это прямое обобщение формулы (2.33) для гармонического осциллятора, полученной в предыдущем параграфе. Таким образом, ядро S-матрицы получается пределом при $t'' \rightarrow \infty, t' \rightarrow -\infty$ интеграла (3.3), который мы для удобства перепишем в симметризованном виде

$$\begin{aligned}
 S(a^*(\mathbf{k}), a(\mathbf{k})) = & \\
 = \lim_{\substack{t'' \rightarrow \infty \\ t' \rightarrow -\infty}} \int \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^3k (a^*(\mathbf{k}, t'') a(\mathbf{k}, t'') + a^*(\mathbf{k}, t') a(\mathbf{k}, t')) + \right. & \\
 + i \int_{t'}^{t''} dt \left[\int d^3k \left(\frac{1}{2i} (\dot{a}^*(\mathbf{k}, t) a(\mathbf{k}, t) - a^*(\mathbf{k}, t) \dot{a}(\mathbf{k}, t)) - \right. & \\
 \left. \left. - \omega(\mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}, t) a(\mathbf{k}, t) \right) - V(a^*, a) \right] \Big\} \prod_{\mathbf{k}, t} \frac{da^*(\mathbf{k}, t) da(\mathbf{k}, t)}{2\pi i}, &
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

где

$$a^*(\mathbf{k}, t'') = a^*(\mathbf{k}) \exp \{i\omega(\mathbf{k}) t''\}, \quad (3.7)$$

$$a(\mathbf{k}, t') = a(\mathbf{k}) \exp \{-i\omega(\mathbf{k}) t'\}. \quad (3.8)$$

Применим эту формулу для вычисления S -матрицы при рассеянии на внешнем источнике $\eta(x)$, когда

$$V(\varphi) = -\eta(x) \varphi(x). \quad (3.9)$$

Соответствующий функционал $V(a^*, a)$ имеет вид

$$V(a^*, a) = \int d^3k [\gamma(\mathbf{k}, t) a^*(\mathbf{k}) + \gamma^*(\mathbf{k}, t) a(\mathbf{k})], \quad (3.10)$$

где

$$\gamma(\mathbf{k}, t) = -\frac{1}{\sqrt{2k_0}} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \eta(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3x. \quad (3.11)$$

Функционал $V(a^*, a)$ явно зависит от времени. Тем не менее все формулы для оператора эволюции остаются в силе и в этом случае. Единственное изменение состоит в том, что теперь оператор эволюции зависит от обеих переменных t'' , t' , а не только от их разности. Подынтегральное выражение в (3.6) в нашем случае опять имеет вид экспоненты от неоднородной квадратичной формы и гауссов интеграл вычисляется тем же приемом, что и в предыдущем параграфе. Условия экстремума выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{a}(\mathbf{k}, t) + i\omega(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}, t) + i\gamma(\mathbf{k}, t) &= 0, \\ \dot{a}^*(\mathbf{k}, t) - i\omega(\mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}, t) - i\gamma^*(\mathbf{k}, t) &= 0, \\ a^*(\mathbf{k}, t'') &= a^*(\mathbf{k}) e^{i\omega t''}, \quad a(\mathbf{k}, t') = a(\mathbf{k}) e^{-i\omega t'}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Решение этих уравнений дается формулой

$$a^*(\mathbf{k}, t) = a^*(\mathbf{k}) e^{i\omega t} - ie^{i\omega t} \int_t^{t''} e^{-i\omega s} \gamma^*(\mathbf{k}, s) ds, \quad (3.13)$$

$$a(\mathbf{k}, t) = a(\mathbf{k}) e^{-i\omega t} - ie^{-i\omega t} \int_{t'}^t e^{i\omega s} \gamma(\mathbf{k}, s) ds. \quad (3.14)$$

Подставляя это решение в показатель экспоненты формулы (3.6) и переходя к пределу, получаем для ядра

S-матрицы выражение

$$S_{\eta}(a^*, a) = \exp \left\{ \int d^3k \left[a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^3x \eta(\mathbf{x}, t) \frac{a^*(\mathbf{k}) e^{i\omega t} e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{x})} + a(\mathbf{k}) e^{-i\omega t} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x})}}{\sqrt{2\omega}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} ds \int d^3x \int d^3y \frac{1}{2\omega} \eta(\mathbf{x}, t) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \eta(\mathbf{y}, s) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} e^{-i\omega|t-s|} \right] \right\}. \quad (3.15)$$

Выражение для S-матрицы становится более элегантным, если перейти от ядра к нормальному символу, что сводится к отбрасыванию первого сомножителя $\exp \left\{ \int d^3k \cdot a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) \right\}$. Оставшиеся сомножители можно переписать в явно релятивистски инвариантной форме. Для этого введем решение свободного уравнения Клейна — Гордона

$$\varphi_0(x) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} \int (a^*(\mathbf{k}) e^{ikx} + a(\mathbf{k}) e^{-ikx}) \frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}}, \quad k_0 = \omega \quad (3.16)$$

$$\square \varphi_0 + m^2 \varphi_0 = 0 \quad (3.17)$$

и функцию Грина этого уравнения

$$D_c(x) = - \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int e^{ikx} e^{-i\omega|x_0|} \frac{d^3k}{2i\omega} = \\ = - \left(\frac{1}{2\pi} \right)^4 \int e^{-ikx} \frac{1}{k^2 - m^2 + i0} d^4k, \quad (3.18)$$

$$(\square + m^2) D_c = \delta^4(x). \quad (3.19)$$

Первое представление для D_c следует из второго после интегрирования по k_0 .

Во введенных обозначениях нормальный символ S-матрицы $S_{\eta}(a^*, a)$ дается формулой

$$S_{\eta}(a^*, a) = \\ = \exp \left\{ i \int \eta(x) \varphi_0(x) dx + \frac{i}{2} \int \eta(x) D_c(x-y) \eta(y) dx dy \right\}. \quad (3.20)$$

Обратим внимание на то, что правильный выбор асимптотических условий на траектории интегрирования автоматически привел к появлению причинной функции Грина в формуле для S -матрицы.

Перейдем теперь к рассмотрению S -матрицы в случае общего потенциала $V(\varphi)$. В этом случае мы, разумеется, не можем вычислить соответствующий континуальный интеграл точно и ограничимся построением для него теории возмущений. Покажем, что в этом случае задача сводится к уже решенной задаче о рассеянии на внешнем поле. Для этого воспользуемся очевидной формулой

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) &= \\ &= \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(x_1)} \dots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(x_n)} \exp \left\{ i \int \varphi(x) \eta(x) dx \right\} \Big|_{\eta=0}; \end{aligned} \quad (3.21)$$

отсюда следует, что произвольный функционал $\Phi(\varphi)$ от $\varphi(x)$ можно записать в виде

$$\Phi(\varphi) = \Phi \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \right) \exp \left\{ i \int \varphi(x) \eta(x) dx \right\} \Big|_{\eta=0}. \quad (3.22)$$

В частности,

$$\begin{aligned} \exp \left\{ -i \int V(\varphi) dx \right\} &= \\ &= \exp \left\{ -i \int V \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta} \right) dx \right\} \exp \left\{ i \int \varphi \eta dx \right\} \Big|_{\eta=0}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Эта формула, разумеется, понимается в смысле теории возмущений.

Тем самым в функциональном интеграле (3.6), определяющем S -матрицу для потенциала общего вида, мы можем заменить в подынтегральном выражении $\exp \left\{ -i \int V(\varphi) dx \right\}$ на правую часть (3.23) и вынести формальный дифференциальный оператор

$$\exp \left\{ -i \int V \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta} \right) dx \right\}$$

за знак континуального интеграла. Остающийся континуальный интеграл в точности совпадает с уже вычис-

ленным интегралом для S -матрицы рассеяния на источнике. В результате мы получили следующее окончательное выражение для нормального символа S -матрицы:

$$\begin{aligned} S(a^*, a) &= S(\varphi_0) = \\ &= \exp \left\{ -i \int V \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \right) dx \right\} \exp \left\{ i \int \eta(x) \varphi_0(x) dx + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2} \int \eta(x) D_c(x-y) \eta(y) dx dy \right\} \Big|_{\eta=0}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Здесь мы заменили пару аргументов a^*, a одной функцией φ_0 , поскольку они друг друга однозначно определяют. Разлагая этот функционал в ряд по φ_0 ,

$$\begin{aligned} S(\varphi_0) &= \\ &= \sum_n \frac{1}{n!} \int S_n(x_1 \dots x_n) \varphi_0(x_1) \dots \varphi_0(x_n) dx_1 \dots dx_n \end{aligned} \quad (3.25)$$

получаем коэффициентные функции $S_n(x_1, \dots, x_n)$. В операторной формулировке эти функции возникают при разложении оператора S -матрицы в ряд по нормальным произведениям свободных полей. Поэтому функционал $S(\varphi_0)$ называют иногда производящим функционалом для коэффициентных функций S -матрицы.

Мы предоставляем читателю убедиться в том, что разложение (3.24) в ряд теории возмущений порождает обычные диаграммы Фейнмана. Роль пропагатора играет функция $D_c(x-y)$, вершины задаются потенциалом $V(\varphi)$, а внешним концам отвечают функции φ_0 . Тем самым формула (3.24) автоматически учитывает теорему Вика для хронологических произведений.

Если в формуле (3.24) не полагать $\eta = 0$, то полученный функционал

$$\begin{aligned} S(\varphi_0, \eta) &= \\ &= \exp \left\{ -i \int V \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \right) dx \right\} \exp \left\{ i \int \eta(x) \varphi_0(x) dx \right\} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{i}{2} \int \eta(x) D_c(x-y) \eta(y) dx dy \right\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

представляет собой нормальный символ S -матрицы для рассеяния взаимодействующих частиц в присутствии

внешнего источника $\eta(x)$. На практике часто удобнее работать не с S -матрицей (3.24), а с функционалом

$$Z(\eta) = \exp \left\{ -i \int V \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \right) dx \right\} \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{2} \int \eta(x) D_c(x-y) \eta(y) dx dy \right\}, \quad (3.27)$$

который совпадает с $S(\varphi_0, \eta)$ при $\varphi_0 = 0$ и имеет смысл амплитуды перехода из вакуума в вакуум в присутствии внешнего источника. Коэффициентные функции $G_n(x_1 \dots \dots x_n)$ в разложении этого функционала в ряд по $\eta(x)$

$$Z(\eta) = \sum_n \frac{1}{n!} \int G_n(x_1, \dots, x_n) \eta(x_1) \dots \eta(x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (3.28)$$

определяют так называемые функции Грина, которым в операторном формализме соответствуют вакуумные средние от хронологических произведений гейзенберговских операторов поля. Функции Грина необходимы, в частности, для проведения программы перенормировки, о которой будет идти речь в следующих главах, и которую до сих пор не удалось провести непосредственно для S -матрицы.

Функционал $Z(\eta)$ содержит в себе больше информации, чем $S(\varphi_0)$, поскольку он определен для произвольных функций η , в то время как $S(\varphi_0)$ определен лишь «на поверхности энергии», т. е. его аргумент φ_0 является решением свободного уравнения движения. Зная функционал $Z(\eta)$, можно восстановить $S(\varphi_0)$. Соответствующая процедура задается так называемыми формулами приведения. Их легко усмотреть из сравнения формул (3.24) и (3.27).

Чтобы получить явные формулы, введем расширенный функционал $\tilde{S}(\varphi)$, заменив в формуле (3.24) φ_0 произвольной функцией четырех переменных. Тогда расширенные вне поверхности энергии коэффициентные функции суть вариационные производные

$$\tilde{S}_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \varphi(x_1)} \dots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \varphi(x_n)} \tilde{S}(\varphi) \Big|_{\varphi=0}. \quad (3.29)$$

С другой стороны, заменим в функционале $Z(\eta)$ аргумент $\eta(x)$ на $\tilde{\eta}(x)$, где

$$\tilde{\eta}(x) = \int D_c(x-y) \eta(y) dy. \quad (3.30)$$

Тогда прямым сравнением убеждаемся, что

$$\int \prod_i dx_i \varphi_0(x_i) \left\{ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \varphi(x_1)} \cdots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \varphi(x_n)} \tilde{S}(\varphi) \Big|_{\varphi=0} - \right. \\ \left. - \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \tilde{\eta}(x_1)} \cdots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \tilde{\eta}(x_n)} Z(\tilde{\eta}) \Big|_{\eta=0} \right\} = 0. \quad (3.31)$$

Таким образом возникает простой рецепт вычисления нормального символа S-матрицы. Нужно вычислить вариационные производные

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(x_1)} \cdots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(x_n)} Z(\eta) \Big|_{\eta=0}, \quad (3.32)$$

т. е. функции Грина $G_n(x_1, \dots, x_n)$, подействовать на эти функции дифференциальным оператором

$$\prod_{i=1}^n (\square_{x_i} + m^2), \quad (3.33)$$

умножить результат на произведение

$$\frac{1}{n!} \prod_i \varphi_0(x_i), \quad (3.34)$$

проинтегрировать по всем x и просуммировать по n .

Альтернативный формализм для вычисления S-матрицы может быть основан непосредственно на представлении ее в виде континуального интеграла. Выражение (3.6) неудобно для этой цели, так как оно не является явно релятивистски инвариантным и содержит предельную процедуру. Преобразуем его к явно релятивистскому виду, выполняя интегрирование по импульсам $\pi(x, t)$. При этом, однако, нужно аккуратно учитывать граничные члены. Заметим прежде всего, что функционал действия, участвующий в формуле (3.6), можно переписать

в терминах полей $\varphi(\mathbf{x}, t)$ и $\pi(\mathbf{x}, t)$

$$\int d^3x \int_{t'}^{t''} \left[\frac{1}{2} (\pi \partial_0 \varphi - \partial_0 \pi \varphi) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \pi^2 - \frac{1}{2} (\partial_k \varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - V(\varphi) \right] dt, \quad (3.35)$$

а мера интегрирования в терминах φ и π имеет вид

$$\prod_{t' \leq t \leq t''} \frac{da^*(\mathbf{k}, t) da(\mathbf{k}, t)}{2\pi i} = \prod_{t' \leq t \leq t''} \frac{d\varphi(\mathbf{x}, t) d\pi(\mathbf{x}, t)}{2\pi}. \quad (3.36)$$

Здесь использована связь между переменными интегрирования $a^*(\mathbf{k}, t)$, $a(\mathbf{k}, t)$ и $\pi(\mathbf{x}, t)$, $\varphi(\mathbf{x}, t)$:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \\ = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} \int (a^*(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} + a(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}}, \quad (3.37)$$

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \\ = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} \int (a^*(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} - a(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}) i \sqrt{\frac{\omega}{2}} d^3k,$$

которая уже введена при $t = 0$ в формулах (3.1).

Будем использовать в интеграле (3.6) наряду с переменными $\varphi(\mathbf{x}, t)$, $\pi(\mathbf{x}, t)$ также и переменные $\varphi_1(\mathbf{x}, t)$, $\pi_1(\mathbf{x}, t)$, полученные из первых сдвигом

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi_0(\mathbf{x}, t) + \varphi_1(\mathbf{x}, t), \\ \pi(\mathbf{x}, t) = \partial_0 \varphi(\mathbf{x}, t) + \pi_1(\mathbf{x}, t). \quad (3.38)$$

Здесь $\varphi_0(\mathbf{x}, t) = \varphi_0(\mathbf{x})$ строится по формуле (3.16) через функции $a^*(\mathbf{k})$ и $a(\mathbf{k})$, которые участвуют в граничных условиях (3.7), (3.8). Интегрированием по частям действие (3.35) преобразуется к новым переменным в следующей форме:

$$\int d^3x \left[\partial_0 \varphi_0 \varphi - \frac{1}{2} \partial_0 \varphi_0 \varphi_0 - \frac{1}{2} \pi \varphi \right] \Big|_{t'}^{t''} + \\ + \int d^3x \int_{t'}^{t''} dt \left[-\frac{1}{2} \pi_1^2 + \frac{1}{2} (\partial_0 \varphi_1 \partial_0 \varphi_1 - \partial_k \varphi_1 \partial_k \varphi_1) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} m^2 \varphi_1^2 - V(\varphi) \right]. \quad (3.39)$$

Мы видим, в частности, что во втором слагаемом переменные φ и π_1 полностью разделились.

Используя (3.37), определение (3.16) функции $\varphi_0(x)$ и граничные условия (3.7), (3.8), мы можем переписать внеинтегральные члены в (3.39) следующим образом:

$$\begin{aligned} i \int d^3x \left[\partial_0 \varphi_0 \varphi - \frac{1}{2} \partial_0 \varphi_0 \varphi_0 - \frac{1}{2} \pi \varphi \right] \Big|_{t'}^{t''} = \\ = \int d^3k \left[a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) - \frac{1}{2} (a^*(\mathbf{k}, t'') a(\mathbf{k}, t'') + \right. \\ \left. + a^*(\mathbf{k}, t') a(\mathbf{k}, t')) - (a(\mathbf{k}, t'') - a(\mathbf{k}) e^{-i\omega t''})^2 - \right. \\ \left. - (a^*(\mathbf{k}, t') - a^*(\mathbf{k}) e^{i\omega t'})^2 \right]. \quad (3.40) \end{aligned}$$

Закончим на этом преобразование подынтегрального выражения в (3.6) и перейдем к обсуждению предела

$t'' \rightarrow \infty, t' \rightarrow -\infty$. В интеграле $\int_{t'}^{t''} dt \int d^3x \pi_1^2$ мы можем перейти к пределу, если $\pi_1(x, t)$ убывает при больших t так, что

$$I(t) = \int \pi_1^2(x, t) d^3x \quad (3.41)$$

является интегрируемой функцией t при $|t| \rightarrow \infty$. В дальнейшем функции, подобные $\pi_1(x, t)$, будем называть быстро убывающими. Функции $\pi_1(x, t)$, для которых

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(t) dt = \infty, \text{ не дают вклада в } S\text{-матрицу, если дого-}$$

вориться, что $\exp\{i\infty\} = 0$.

Граничные условия (3.7), (3.8) определяют асимптотическое поведение переменных $a^*(\mathbf{k}, t)$ при $t \rightarrow \infty$ и $a(\mathbf{k}, t)$ при $t \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} a^*(\mathbf{k}, t) &= a^*(\mathbf{k}) e^{i\omega t} + a_{1, \text{out}}^*(\mathbf{k}, t), \quad t \rightarrow \infty, \\ a(\mathbf{k}, t) &= a(\mathbf{k}) e^{-i\omega t} + a_{1, \text{in}}(\mathbf{k}, t), \quad t \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (3.42)$$

где $a_{1, \text{out}}^*(\mathbf{k}, t)$ и $a_{1, \text{in}}(\mathbf{k}, t)$ — быстро убывающие функции при $t \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow -\infty$ соответственно.

Из (3.42) следует, что разности

$$\partial_0 a^*(\mathbf{k}, t) - i\omega a^*(\mathbf{k}, t) \text{ и } \partial_0 a(\mathbf{k}, t) + i\omega a(\mathbf{k}, t) \quad (3.43)$$

быстро убывают при $t \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow -\infty$ соответственно. Тогда, как видно из (3.37), разность $\pi - \partial_0 \varphi = \pi_1$ будет быстро убывать при $|t| \rightarrow \infty$ только, если

$$\begin{aligned} \partial_0 a(\mathbf{k}, t) + i\omega(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}, t) &= a_1(\mathbf{k}, t), \\ \partial_0 a^*(\mathbf{k}, t) - i\omega(\mathbf{k}) a^*(\mathbf{k}, t) &= a_1^*(\mathbf{k}, t), \end{aligned} \quad (3.44)$$

где $a_1(\mathbf{k}, t)$ и $a_1^*(\mathbf{k}, t)$ быстро убывают при $t \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow -\infty$.

Соотношение (3.44) вместе с (3.41) означает, что переменные интегрирования $\varphi(\mathbf{x}, t)$ при $|t| \rightarrow \infty$ имеют асимптотики

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi_{0, \text{in}}(\mathbf{x}, t) + \varphi_{1, \text{in}}(\mathbf{x}, t), \quad t \rightarrow \mp \infty, \quad (3.45)$$

где $\varphi_{1, \text{in}}(\mathbf{x}, t)$ быстро убывают при $t \rightarrow -\infty$, $\varphi_{1, \text{out}}(\mathbf{x}, t)$ быстро убывают при $t \rightarrow \infty$, и $\varphi_{0, \text{in}}(\mathbf{x}, t)$ являются решениями свободного уравнения движения

$$\square \varphi_{0, \text{in}} + m^2 \varphi_{0, \text{in}} = 0, \quad (3.46)$$

заданными формулами

$$\begin{aligned} \varphi_{0, \text{in}}(\mathbf{x}) &= \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} \int \left(a_{\text{in}}^*(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + a_{\text{in}}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \right) \Big|_{k_0=\omega} \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega}}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

где

$$a_{\text{in}}(\mathbf{k}) = a(\mathbf{k}), \quad a_{\text{out}}^*(\mathbf{k}) = a^*(\mathbf{k}). \quad (3.48)$$

На функции $a_{\text{out}}(\mathbf{k})$ и $a_{\text{in}}^*(\mathbf{k})$ никаких условий не накладывается.

При описанном асимптотическом поведении переменных интегрирования два последних слагаемых в правой части (3.40) исчезают в пределе $t'' \rightarrow \infty$, $t' \rightarrow -\infty$. Действительно, имеем, например,

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{k} (a^*(\mathbf{k}, t') - a^*(\mathbf{k}) e^{i\omega t'})^2 &= \int d^3\mathbf{k} [(a_{\text{in}}^*(\mathbf{k}) - a^*(\mathbf{k}))^2 e^{2i\omega t'} + \\ &+ 2(a_{\text{in}}^*(\mathbf{k}) - a^*(\mathbf{k})) e^{i\omega t'} a_1(\mathbf{k}, t') + a_1^2(\mathbf{k}, t')]. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Последние два слагаемых здесь исчезают при $t' \rightarrow -\infty$ в силу быстрого убывания $a_1(\mathbf{k}, t)$, а первое исчезает по лемме Римана — Лебега из-за осцилляций $\exp\{2i\omega t'\}$.

Соберем теперь вклад исчезающих выражений в S -матрицу. Заметим, что второе слагаемое в (3.40) сокращается с граничными членами в (3.6). В результате для ядра S -матрицы получаем выражение

$$S(a^*, a) = \exp \left\{ \int a^*(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) d^3k \right\} \int \exp \left\{ i \int dx \left[-\frac{1}{2} \pi_1^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_1 \partial_\mu \varphi_1 - \frac{m^2}{2} \varphi_1^2 - V(\varphi) \right] \right\} \prod_x \frac{d\varphi(x) d\pi(x)}{2\pi}, \quad (3.50)$$

где мы перешли к релятивистским обозначениям $x = (x, t)$. Переменные $\varphi_1(x)$, $\pi_1(x)$ связаны с $\varphi(x)$, $\pi(x)$ по формулам (3.38).

В формуле (3.50) переменные π_1 и φ полностью разделились, и мы можем явно проинтегрировать до π_1 . Граничные условия на π_1 не зависят от $a^*(\mathbf{k})$ и $a(\mathbf{k})$, так что интеграл

$$N^{-1} = \int \exp \left\{ -i \int \frac{1}{2} \pi_1^2 dx \right\} \prod_x \frac{d\pi_1(x)}{2\pi} \quad (3.51)$$

представляет собой просто нормировочную константу.

Первый сомножитель в (3.50) можно опустить, переходя от ядра к нормальному символу S -матрицы. В результате для нормального символа получается явно релятивистское выражение

$$S(\varphi_0) = N^{-1} \int \exp \left\{ i \int dx \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_1 \partial_\mu \varphi_1 - \frac{1}{2} m^2 \varphi_1^2 - V(\varphi) \right] \right\} \prod_x d\varphi(x), \quad (3.52)$$

где интегрирование ведется по всем полям $\varphi(x)$, имеющим асимптотическое поведение, описанное формулами (3.45) — (3.48), причем

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - \varphi_0(x). \quad (3.53)$$

Из сравнения (3.45) и (3.16) мы видим, что φ_1 имеет следующее асимптотическое поведение

$$\varphi_1(x) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} \int b^*(\mathbf{k}) e^{ikx} \Big|_{k_0=\omega} \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} + \varphi_{2, \text{ in}}(x), \quad t = -\infty, \quad (3.54)$$

$$\varphi_1(x) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} \int b(\mathbf{k}) e^{-ikx} \Big|_{k_0=\omega} \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} + \varphi_{2, \text{ out}}(x), \quad t \rightarrow \infty,$$

где $\varphi_{2, \text{in}}(x)$ быстро убывают при $t \rightarrow \mp \infty$. Будем говорить, что $\varphi_1(x)$ удовлетворяет условиям излучения Фейнмана. В альтернативной формулировке $\varphi_1(x)$ не имеет сходящейся волны при $t \rightarrow -\infty$ и расходящейся волны при $t \rightarrow \infty$. Сходящаяся и расходящаяся волны переменной $\varphi(x, t)$ полностью определяются решением $\varphi_0(x)$.

На функциях $\varphi_1(x)$, удовлетворяющих условию излучения, оператор Клейна — Гордона $\square + m^2$ симметричен:

$$\begin{aligned} \int \varphi_1 (\square + m^2) \varphi'_1 dx &= \int [(\square + m^2) \varphi_1] \varphi'_1(x) dx = \\ &= - \int (\partial_\mu \varphi_1 \partial_\mu \varphi'_1 - m^2 \varphi_1 \varphi'_1) dx. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Действительно, внеинтегральные члены, возникающие при интегрировании по частям при перебросе оператора $\square$ с φ_1 на φ'_1 , имеют вид

$$\begin{aligned} \int d^3x \varphi_1 \partial_0 \varphi'_1 \Big|_{t'}^{t''} &= \\ &= i \int d^3k [b^*(\mathbf{k}) b'^*(-\mathbf{k}) e^{2i\omega t''} - b(\mathbf{k}) b'(-\mathbf{k}) e^{-2i\omega t'}] + \dots, \end{aligned} \quad (3.56)$$

где ... означает члены, содержащие $\varphi_{2, \text{in}}^{\text{out}}$. Интегралы

(3.56) исчезают при $t'' \rightarrow \infty$, $t' \rightarrow -\infty$ по причинам, описанным после формулы (3.49). Таким образом, квадратичная форма в (3.52) определена однозначно как квадратичная форма оператора Клейна — Гордона в пространстве функций $\varphi_1(x)$, удовлетворяющих условию излучения.

Действие оператора $\square + m^2$ превращает функции, удовлетворяющие условию излучения, в быстро убывающие функции, причем это действие обратимо. Уравнение

$$(\square + m^2) \varphi = \eta, \quad (3.57)$$

где φ удовлетворяет условию излучения, а η — быстро убывает, имеет единственное решение,

$$\varphi(x) = \int D_c(x - y) \eta(y) dy, \quad (3.58)$$

где функция $D_c(x)$ уже была введена выше в (3.17).

Формулу (3.52) можно переписать в более наглядном виде

$$S(\varphi_0) = N^{-1} \int_{\varphi \rightarrow \varphi_{\text{in}}^{\text{out}}} \exp \left\{ i \int \mathcal{L}(x) dx \right\} \prod_x d\varphi(x), \quad (3.59)$$

где следует понимать, что квадратичная форма в действии $\int \mathcal{L}(x) dx$ регуляризована так, что

$$\begin{aligned} \int (\partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^2) dx = \\ = \int [\partial_\mu (\varphi - \varphi_0) \partial_\mu (\varphi - \varphi_0) - m^2 (\varphi - \varphi_0)^2] dx. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Левая часть может быть формально преобразована в правую, если позволить себе интегрировать по частям, забывая о внеинтегральных членах.

Формула (3.59) может служить отправным пунктом для схемы вычисления S-матрицы, несколько отличной от описанной выше фейнмановской теории возмущений. Эта схема основана на формальном применении к интегралу (3.59) метода стационарной фазы и называется разложением по петлям. Мы не будем обсуждать этот метод в данной книге и ограничимся фейнмановской теорией возмущений.

Используя (3.59), мы можем сразу же написать и выражение для производящего функционала функций Грина через континуальный интеграл. Поскольку $Z(\eta)$ является амплитудой перехода из вакуума в вакуум в присутствии источника $\eta(x)$, имеем

$$Z(\eta) = N^{-1} \int \exp \left\{ i \int [\mathcal{L}(x) + \eta(x) \varphi(x)] dx \right\} \prod_x d\varphi(x), \quad (3.61)$$

где интегрирование ведется по полям $\varphi(x)$, удовлетворяющим условию излучения.

Полученные формулы (3.59) и (3.61) привлекательны своей компактностью и наглядностью. Так, представление для $Z(\eta)$ в виде интеграла позволяет применять простые формулы анализа: интегрирование по частям, перемену порядков интегрирования, замены переменных,

вычисление по методу стационарной фазы. К сожалению, как мы уже говорили, на сегодня не существует определения этого интеграла во внутренних терминах, которое сделало бы эти формальные преобразования строгими. Тем не менее в рамках теории возмущений формуле (3.61) можно придать строгий смысл, используя формулу (3.27), выражающую $Z(\eta)$ в терминах вариационных производных.

Приняв за основу эту формулу, можно строго обосновать все перечисленные выше операции для интеграла (3.61) в рамках теории возмущений. Это будет сделано в параграфе пятом.

§ 4. Континуальный интеграл по ферми-полям

Описанная в предыдущих разделах техника практически без изменений переносится на случай нескольких взаимодействующих скалярных полей, а также на другие бозе-поля, в том числе векторные, которые будут подробно рассмотрены в следующей главе. В этом параграфе мы покажем, что для ферми-полей можно разработать такую схему интегрирования, что соответствующие формулы динамики (оператор эволюции, S -матрица) будут выглядеть практически так же, как для бозе-полей.

Начнем со случая ферми-системы с одной степенью свободы. Пространство состояний для такой системы двумерно. В нем действуют два оператора a^* , a , сопряженные друг другу и удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$a^*a + aa^* = 1, \quad (a^*)^2 = 0; \quad a^2 = 0. \quad (4.1)$$

Эти операторы можно представить матрицами 2×2

$$a^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Формализм континуального интегрирования основан на другом представлении операторов a^* , a , являющемся своеобразным аналогом голоморфного представления. Рассмотрим две антикоммутирующие переменные a^* , a :

$$a^*a + aa^* = 0; \quad (a^*)^2 = 0; \quad a^2 = 0. \quad (4.3)$$

Такие переменные называются образующими алгебры Грассмана. Общий элемент этой алгебры (функция от образующих) дается формулой

$$f(a^*, a) = f_{00} + f_{01}a + f_{10}a^* + f_{11}aa^*, \quad (4.4)$$

где f_{00} , f_{01} , f_{10} , f_{11} — комплексные числа. Голоморфными функциями назовем функции, зависящие только от a^* :

$$f(a^*) = f_0 + f_1a^*. \quad (4.5)$$

Множество таких функций образует двумерное пространство и мы используем их для представления векторов состояний нашей системы.

Операторы a^* и a возьмем в виде

$$a^*f(a^*) = a^*f(a^*); \quad af(a^*) = \frac{d}{da^*}f(a^*), \quad (4.6)$$

где дифференцирование естественно определяется формулой

$$\frac{d}{da^*}(f_0 + f_1a^*) = f_1. \quad (4.7)$$

Нетрудно убедиться в том, что коммутационные соотношения (4.1) действительно выполняются. Наша следующая задача — ввести скалярное произведение в пространстве голоморфных функций, такое, чтобы операторы a^* и a были сопряжены друг другу. Мы сделаем это посредством удобного определения интеграла от функций вида (4.4) по da^*da . Будем считать, что da^* и da антикоммутируют между собой так же, как с a и a^* , и определим однократные интегралы

$$\int a^* da^* = 1; \quad \int a da = 1; \quad \int da^* = 0; \quad \int da = 0. \quad (4.8)$$

Заметим, что наглядный смысл последних двух формул состоит в том, что интеграл от полной производной равен нулю. Приведенных правил достаточно для определения интеграла от любой функции, если еще условиться понимать кратный интеграл как повторный. Тогда

$$\int f(a^*, a) da^* da = f_{11}. \quad (4.9)$$

Искомое скалярное произведение дается формулой

$$(f_1, f_2) = \int (f_1(a^*))^* f_2(a^*) e^{-a^*a} da^* da; \quad (4.10)$$

здесь понимается, что

$$(f(a^*))^* = f_0^* + f_1^*a. \quad (4.11)$$

Проверим, что это скалярное произведение положительно определено. Для этого покажем, что одночлены

$$\psi_0 = 1; \quad \psi_1 = a^* \quad (4.12)$$

ортонормированы. Имеем

$$(\psi_0, \psi_0) = \int e^{-a^*a} da^* da = \int (1 - a^*a) da^* da = 1; \quad (4.13)$$

$$(\psi_0, \psi_1) = \int a^* e^{-a^*a} da^* da = 0; \quad (4.14)$$

$$(\psi_1, \psi_1) = \int aa^* e^{-a^*a} da^* da = 1. \quad (4.15)$$

Сопряженность операторов a^* , a следует из того, что в базисе ψ_0, ψ_1 они задаются матрицами (4.2). Действительно,

$$\begin{aligned} a^* \psi_0 &= \psi_1; & a^* \psi_1 &= 0; \\ a \psi_0 &= 0; & a \psi_1 &= \psi_0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Применим сформулированные правила интегрирования для вычисления интеграла от экспоненты, показатель которой является неоднородной квадратичной формой

$$\int \exp \{a^* A a + a^* b + b^* a\} da^* da, \quad (4.17)$$

где b и b^* антикоммутируют между собой и с a^* , a .

Как следует из формулы (4.9), мы можем сделать в интеграле (4.17) сдвиг переменных интегрирования

$$a^* \rightarrow a^* - A^{-1}b^*; \quad a \rightarrow a - A^{-1}b, \quad (4.18)$$

так как коэффициент при aa^* в подынтегральной функции не меняется при таком сдвиге. После этого сдвига интеграл (4.17) приобретает вид

$$\begin{aligned} \exp \{-b^* A^{-1}b\} \int \exp \{a^* A a\} da^* da &= \\ &= -A \exp \{-b^* A^{-1}b\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Обратим внимание, что формула (4.19) выглядит точно так же, как в случае интегрирования по коммутирующим переменным, за исключением того, что множитель A стоит в числителе, а не в знаменателе, как это было бы в случае коммутирующих переменных.

Приступим к описанию способов задания операторов в рассматриваемом представлении. Общего вида оператор A можно задать в виде

$$A = K_{00} + K_{10}a^* + K_{01}a + K_{11}a^*a. \quad (4.20)$$

Мы можем сопоставить ему две функции на алгебре Грассмана: нормальный символ

$$K(a^*, a) = K_{00} + K_{10}a^* + K_{01}a + K_{11}a^*a, \quad (4.21)$$

и ядро

$$A(a^*, a) = A_{00} + A_{10}a^* + A_{01}a + A_{11}a^*a, \quad (4.22)$$

где A_{nm} , $n, m = 0, 1$ — матричные элементы оператора A в базисе ψ_0, ψ_1 :

$$A_{nm} = \langle \psi_n | A | \psi_m \rangle. \quad (4.23)$$

Ясно, что

$$(Af)(a^*) = \int A(a^*, \alpha) f(\alpha^*) e^{-\alpha^* \alpha} d\alpha^* d\alpha; \quad (4.24)$$

$$(A_1 A_2)(a^*, a) = \int A_1(a^*, \alpha) A_2(\alpha^*, a) e^{-\alpha^* \alpha} d\alpha^* d\alpha. \quad (4.25)$$

Чтобы записать эти формулы, нам пришлось ввести новые антикоммутирующие переменные α^*, α . По определению, α^*, α антикоммутируют с a^*, a .

Нормальный символ $K(a^*, a)$ и ядро $A(a^*, a)$ данного оператора A связаны между собой формулой

$$A(a^*, a) = e^{a^* a} K(a^*, a). \quad (4.26)$$

Для доказательства этого утверждения достаточно сравнить коэффициенты K_{nm} и A_{nm} в формулах (4.21) и (4.22), и убедиться, что

$$K_{00} = A_{00}; \quad K_{01} = A_{01}; \quad K_{10} = A_{10}; \quad K_{11} = A_{11} - A_{00}. \quad (4.27)$$

Все приведенные формулы без труда обобщаются на случай n степеней свободы. Для этого следует использовать $2n$ антикоммутирующих переменных

$$a_1, \dots, a_n; \quad a_1^*, \dots, a_n^*. \quad (4.28)$$

Пространство векторов состояния составлено аналитическими функциями $f(a^*)$ и имеет размерность 2^n . Операторы a_i^* , a_i , $i = 1, \dots, n$ действуют по правилу

$$a_i f(a^*) = \left(\frac{\partial}{\partial a_i^*} \right)_L f(a^*); \quad a_i^* f(a^*) = a_i^* f(a^*), \quad (4.29)$$

где индекс L означает, что при дифференцировании по a_i^* мы должны в функции $f(a^*)$ пронести переменную a_i^* налево, прежде чем ее опустить.

Введенные операторы удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$a_i^* a_k + a_k a_i^* = \delta_{ik}; \quad a_i^* a_k^* + a_k^* a_i^* = 0; \quad a_i a_k + a_k a_i = 0 \quad (4.30)$$

и сопряжены друг другу относительно скалярного произведения

$$(f_1, f_2) = \int (f_1(a^*))^* f_2(a^*) e^{-\sum a^* a} \prod da^* da. \quad (4.31)$$

Здесь операция $*$ вводится по формуле

$$(C a_{i_1}^* \dots a_{i_r}^*)^* = C^* a_{i_r} \dots a_{i_1}; \quad (4.32)$$

интегрирование вводится так же, как и выше.

Интеграл от произвольной функции $f(a^*, a)$ равен

$$\int f(a^*, a) \prod da^* da = f_{1, \dots, n, n, \dots, 1}, \quad (4.33)$$

где $f_{1, \dots, n, n, \dots, 1}$ — коэффициент при одночлене $a_1 \dots \dots a_n a_n^* \dots a_1$ в разложении f по образующим. Гауссов интеграл

$$\int \exp \{ a_i^* A_{ik} a_k + a_i^* b_i + b_i^* a_i \} \prod_i da_i^* da_i \quad (4.34)$$

вычисляется сдвигом, как и в случае одной степени свободы, и равен

$$\exp \{ -b_i^* (A^{-1})_{ik} b_k \} \int \exp \{ a_i^* A_{ik} a_k \} \prod_i da_i^* da_i. \quad (4.35)$$

Оставшийся интеграл в силу формулы (4.33) равен $\det A (-1)^n$.

Заметим, что экспоненту в ответе можно получить, подставляя в подынтегральную функцию решение уравнений

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{da_i^*} \right)_L (a_i^* A_{ik} a_k + a_i^* b_i + b_i^* a_i) &= 0; \\ \left(\frac{d}{da_i} \right)_L (a_i^* A_{ik} a_k + a_i^* b_i + b_i^* a_i) &= 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Это свойство является общим для гауссовых интегралов, как по обычным коммутирующим, так и по антикоммутирующим переменным. Мы неоднократно будем им пользоваться в дальнейшем. Одночлены

$$\psi_{i_1, \dots, i_r} = a_{i_1}^* \dots a_{i_r}^* \quad (i_1 < i_2 < \dots < i_r) \quad (4.37)$$

ортонормированы и образуют базис в пространстве состояний.

Так же, как и в случае одной степени свободы, произвольный оператор A может быть задан нормальным символом $K(a^*, a)$ или ядром $A(a^*, a)$. Если оператор A дается выражением

$$A = \sum_{r,t} \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_r \\ j_1 < \dots < j_t}} K_{i_1 \dots i_r | j_1 \dots j_t} a_{i_1}^* \dots a_{i_r}^* a_{j_1} \dots a_{j_t}, \quad (4.38)$$

то

$$K(a^*, a) = \sum_{r,t} \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_r \\ j_1 < \dots < j_t}} K_{i_1 \dots i_r | j_1 \dots j_t} a_{i_1}^* \dots a_{i_r}^* a_{j_1} \dots a_{j_t} \quad (4.39)$$

и

$$\begin{aligned} A(a^*, a) &= \\ &= \sum_{r,t} \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_r \\ j_1 < \dots < j_t}} A_{i_1 \dots i_r | j_1 \dots j_t} a_{i_1}^* \dots a_{i_r}^* a_{j_1} \dots a_{j_t}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

где

$$A_{i_1 \dots i_r | j_1 \dots j_t} = \langle \psi_{i_1 \dots i_r} | A | \psi_{j_1 \dots j_t} \rangle. \quad (4.41)$$

Между ядром и нормальным символом имеет место соотношение

$$A(a^*, a) = e^{\sum a_i^* a_i} K(a^*, a). \quad (4.42)$$

Действие оператора на функцию и произведение операторов задается формулами

$$(Af)(a^*) = \int A(a^*, \alpha) f(\alpha^*) e^{-\Sigma \alpha^* \alpha} \prod d\alpha^* d\alpha; \quad (4.43)$$

$$(A_1 A_2)(a^*, \alpha) = \int A_1(a^*, \alpha) A_2(\alpha^*, \alpha) e^{-\Sigma \alpha^* \alpha} \prod d\alpha^* d\alpha. \quad (4.44)$$

Если сравнить полученные формулы с формулами (2.11), (2.14), выведенными в § 2 для бозе-системы, то нетрудно заметить, что они имеют один и тот же вид. Если проследить вывод представления для ядра оператора эволюции через континуальный интеграл, то можно убедиться, что весь он основан на двух формулах (2.17) и (2.14). В случае фермионов мы имеем абсолютно идентичные формулы (4.42), (4.44). Поэтому можно сразу написать представление для ядра оператора эволюции ферми-системы с гамильтонианом $h(a^*, a; t)$ в виде

$$\begin{aligned} U(a^*, a; t'', t') = & \int \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_k (a_k^*(t'') a_k(t'') + a_k^*(t') a_k(t')) + \right. \\ & \left. + i \int_{t'}^{t''} \left[\frac{1}{2i} \sum_k (a_k^* \dot{a}_k - \dot{a}_k^* a_k) - h(a^*(t), a(t), t) \right] dt \prod_{t, k} da^* da, \right. \\ & \left. \right\} \end{aligned} \quad (4.45)$$

где считается, что

$$a_k^*(t'') = a_k^*; \quad a_k(t') = a_k. \quad (4.46)$$

Подчеркнем, что здесь мы имеем дело с интегралом по бесконечномерной алгебре Грассмана, с независимыми образующими $a_k^*(t)$, $a_k(t)$, $k = 1, \dots, n$ для каждого t , $t' \leq t \leq t''$.

Перейдем теперь к теории поля. Комплексное спинорное поле можно рассматривать как систему фермионов с бесконечным числом степеней свободы. Образующими алгебры Грассмана являются в этом случае антикоммутирующие функции $\bar{\psi}(x)$, $\psi(x)$, или линейно с ними свя-

занные функции $b_i(\mathbf{k})$, $b_i^*(\mathbf{k})$, $c_i^*(\mathbf{k})$, $c_i(\mathbf{k})$, $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{x}) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int (e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} u_i(\mathbf{k}) b_i^*(\mathbf{k}) + e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} v_i(\mathbf{k}) c_i(\mathbf{k})) d^3k, \\ \psi^*(\mathbf{x}) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int (e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} u_i^*(\mathbf{k}) b_i(\mathbf{k}) + e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} v_i^*(\mathbf{k}) c_i^*(\mathbf{k})) d^3k,\end{aligned}\quad (4.47)$$

где $u_i(\mathbf{k})$, $v_i(\mathbf{k})$ две пары линейно независимых решения уравнения Дирака

$$\begin{aligned}(\gamma_\mu k_\mu - m) u_i(\mathbf{k})|_{k_0=\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} &= 0; \\ (\gamma_\mu k_\mu - m) v_i(\mathbf{k})|_{k_0=-\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}} &= 0; \quad i = 1, 2.\end{aligned}\quad (4.48)$$

В терминах образующих b , b^* , c , c^* задается обычным образом нормальное произведение, т. е. в записи произвольных операторов через ядро $A(b^*, c^*; b, c)$ или нормальный символ $K(b^*, c^*; b, c)$ образующие b^* , c^* стоят слева от b , c .

Рассмотрим систему ферми-полей, взаимодействующих с внешним источником, в качестве которого возьмем антикоммутирующие спинорные функции $\xi(\mathbf{x})$, $\bar{\xi}(\mathbf{x})$. Гамильтониан такой системы имеет вид

$$\begin{aligned}h &= \int (i\bar{\psi}(\mathbf{x}) \gamma_k \partial_k \psi(\mathbf{x}) + m\bar{\psi}(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) + \bar{\psi}(\mathbf{x}) \xi(\mathbf{x}) + \\ &+ \bar{\xi}(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x})) d^3x = \int [\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2} (b_i^*(\mathbf{k}) b_i(\mathbf{k}) + c_i^*(\mathbf{k}) c_i(\mathbf{k})) + \\ &+ \gamma_i^*(\mathbf{k}, t) b_i + b_i^* \gamma_i(\mathbf{k}, t) + \delta_i^*(\mathbf{k}, t) c_i(\mathbf{k}) + c_i^*(\mathbf{k}) \delta_i(\mathbf{k}, t)] d^3k.\end{aligned}\quad (4.49)$$

Здесь при переходе к импульсному представлению использованы свойства ортонормированности спиноров u_i и v_i , $i = 1, 2$. При этом

$$\begin{aligned}\gamma_i(\mathbf{k}, t) &= u_i^* \bar{\xi}(\mathbf{k}, t); \quad \delta_i(\mathbf{k}, t) = v_i^* \bar{\xi}(\mathbf{k}, t), \\ \bar{\xi}(\mathbf{k}, t) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \bar{\xi}(\mathbf{x}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3x.\end{aligned}\quad (4.50)$$

S -матрица в виде континуального интеграла дается формулой

$$S(b^*, c^*; b, c) = \lim_{\substack{t'' \rightarrow \infty \\ t' \rightarrow -\infty}} \int \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^3k (b_i^*(\mathbf{k}, t'') b_i(\mathbf{k}, t'') + \right. \\ \left. + b_i^*(\mathbf{k}, t') b_i(\mathbf{k}, t') + (b \leftrightarrow c) + \right. \\ \left. + i \int_{t'}^{t''} dt \left[\int d^3k \frac{1}{2i} (\dot{b}_i^*(\mathbf{k}, t) b_i(\mathbf{k}, t) - b_i^*(\mathbf{k}, t) \dot{b}_i(\mathbf{k}, t) + \right. \right. \\ \left. \left. + (b \leftrightarrow c)) - h(b^*, b, c^*, c) \right] \right\}, \quad (4.51)$$

который является гауссовым и вычисляется совершенно аналогично соответствующему интегралу (3.6), (3.15) для скалярного поля. Выражение для нормального символа записывается в явно релятивистском виде

$$S_{\text{norm}}(\bar{\xi}, \xi; b^*, b, c^*, c) = \exp \left\{ i \int \bar{\xi}(x) S_c(x-y) \xi(y) dx dy + \right. \\ \left. + i \int (\bar{\xi}(x) \psi_0(x) + \bar{\psi}_0(x) \xi(x)) dx \right\}, \quad (4.52)$$

где

$$S_c(x-y) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \frac{1}{i} \int e^{ik(x-y)} e^{-ik_0|x_0-y_0|} (v_i(\mathbf{k}) \otimes v_i^*(\mathbf{k}) + \\ + u_i(\mathbf{k}) \otimes u_i^*(\mathbf{k})) d^3k = \\ = - \left(\frac{1}{2\pi} \right)^4 \int (\gamma_\mu k_\mu - m + i0)^{-1} e^{-ik(x-y)} d^4k \quad (4.53)$$

— причинная функция Грина уравнения Дирака и

$$\psi_0(x) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} \int (b_i^*(\mathbf{k}) u_i(\mathbf{k}) e^{ikx} + v_i(\mathbf{k}) c_i(\mathbf{k}) e^{-ikx}) \Big|_{k_0=\omega} d^3k \quad (4.54)$$

— решение свободного уравнения Дирака

$$(i\gamma_\mu \partial_\mu - m) S_c(x) = \delta(x), \quad (i\gamma_\mu \partial_\mu - m) \psi_0 = 0. \quad (4.55)$$

Для перехода от первого представления для S_c ко второму опять используются свойства спиноров u_i, v_i . Первое представление делает очевидным, в каком смысле функция Грина S_c является причинной:

$$\psi_1(x) = \int S_c(x-y) \xi(y) d^4y \quad (4.56)$$

не имеет сходящейся или расходящейся волны при $t \rightarrow -\infty$ и $t \rightarrow \infty$, соответственно.

Формула (4.52) может быть положена в основу вывода разложения теории возмущений для S матрицы спинорного поля, взаимодействующего с самим собой или с другими полями. Для этого заметим, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\xi}(x)} \right)_L \exp \left\{ i \int (\bar{\xi} \psi + \bar{\psi} \xi) dx \right\} = \\ = \psi(x) \exp \left\{ i \int (\bar{\xi} \psi + \bar{\psi} \xi) dx \right\}, \\ \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \xi(x)} \right)_R \exp \left\{ i \int (\bar{\xi} \psi + \bar{\psi} \xi) dx \right\} = \\ = \exp \left\{ i \int (\bar{\xi} \psi + \bar{\psi} \xi) dx \right\} \bar{\psi}(x), \end{aligned} \quad (4.57)$$

где определение правой производной естественным образом модифицирует определение левой. Эти формулы вместе с (4.52) позволяют сводить континуальный интеграл для S -матрицы с произвольным взаимодействием полей $\bar{\psi}$, ψ , φ к интегралу для S -матрицы с внешним источником. Функции Грина спинорного поля и формулы приведения получаются естественной модификацией формулы для скалярного поля. Мы закончим обсуждение, приведя выражение для производящего функционала для функций Грина взаимодействующих спинорного и скалярного полей с лагранжианом:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x) i \gamma_\mu \partial_\mu \psi(x) - m \bar{\psi}(x) \psi(x) + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi(x) \partial_\mu \varphi(x) - \\ - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2(x) - g \bar{\psi}(x) \psi(x) \varphi(x), \end{aligned} \quad (4.58)$$

содержащим простейший вариант взаимодействия; этот функционал дается выражением

$$\begin{aligned} Z(\eta, \bar{\xi}, \xi) = \exp \left\{ -ig \int \frac{1}{i} \left(\frac{\delta}{\delta \bar{\xi}(x)} \frac{\delta}{\delta \xi(x)} \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \right) dx \right\} \times \\ \times \exp \left\{ i \int (\bar{\xi}(x) S_c(x-y) \xi(y) + \frac{1}{2} \eta(x) D(x-y) \eta(y)) dx dy \right\} \end{aligned} \quad (4.59)$$

и может быть записан в виде континуального интеграла

$$Z(\eta, \bar{\xi}, \xi) = \frac{1}{N} \int \exp \left\{ i \int (\mathcal{L}(x) + \eta \varphi + \bar{\xi} \psi + \bar{\psi} \xi) dx \right\} \prod_x d\bar{\psi} d\psi d\varphi, \quad (4.60)$$

где интегрирование ведется по полям $\bar{\psi}(x)$, $\psi(x)$, $\varphi(x)$, не имеющим асимптотически при $t \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow \infty$ сходящихся и расходящихся волн соответственно.

§ 5. Свойства континуального интеграла в теории возмущений

Как мы уже говорили, на сегодня не существует определения континуального интеграла во внутренних терминах. Однако для нужд теории возмущений в квантовой теории поля достаточно уметь работать лишь с континуальными интегралами специального вида — гауссовыми интегралами. Для таких интегралов можно развить технику вычисления и преобразований, которая в компактной и наглядной форме содержит всю комбинаторику диаграммной теории возмущений.

Получим эти правила для случая скалярного поля, на примере производящего функционала для функций Грина. Для этого функционала у нас есть два эквивалентных представления: в виде континуального интеграла (3.61) и явная формула (3.27). Примем в качестве определения гауссова континуального интеграла формулу (3.27). Более точно, положим

$$\begin{aligned} & \int \exp \left\{ i \int \frac{1}{2} \varphi(x) K(x-y) \varphi(y) dx dy + i \int \varphi(x) \eta(x) dx \right\} \times \\ & \times \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \prod_x d\varphi(x) = (-i)^n \frac{\delta}{\delta \eta(x_1)} \dots \\ & \dots \frac{\delta}{\delta \eta(x_n)} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int \eta(x) K^{-1}(x-y) \eta(y) dx dy \right\}. \quad (5.1) \end{aligned}$$

По определению, интегрирование по $d\varphi$ перестановочно с интегрированием по dx и дифференцированием по

внешним источникам $\eta(x)$. Предполагается, что оператор K с ядром $K(x-y)$ имеет обратный K^{-1} с ядром $K^{-1}(x-y)$:

$$\begin{aligned} \int K(x-z) K^{-1}(z-y) dz = \\ = \int K^{-1}(x-z) K(z-y) dz = \delta(x-y). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Мы будем считать, что ядро $K^{-1}(x-y)$ достаточно гладкая функция. Функция $D_c(x-y)$, которая фигурирует в производящем функционале $Z(\eta)$, разумеется, этим свойством не обладает, что приводит при его вычислении по теории возмущений к появлению ультрафиолетовых расходимостей. Эти расходимости устраняются процедурой перенормировки, которая будет обсуждаться в главе IV. Первый этап этой процедуры состоит во введении промежуточной регуляризации, заменяющей функцию $D_c(x-y)$ гладкой функцией. Таким образом, рассуждения, которые будут приведены ниже, относятся к регуляризованной теории возмущений.

Класс функций $\varphi(x)$, по которым ведется интегрирование, должен обеспечивать однозначное определение оператора, обратного к K . Если $K = \square$, таким условием является уже много раз упомянутое условие причинности: φ асимптотически при $|t| \rightarrow \infty$ ведет себя как решение свободного уравнения, не имеющее сходящейся волны при $t \rightarrow -\infty$ и расходящейся волны при $t \rightarrow \infty$. Оператор K^{-1} в этом случае является интегральным с ядром D_c (точнее, как только что говорилось, его регуляризацией). Подынтегральное выражение в формуле (5.1) при $\eta = 0$ будем называть гауссовым функционалом.

Перейдем теперь к обсуждению свойств континуального интеграла, определенного формулой (5.1).

Заметим прежде всего, что функционал (5.1), который естественно назвать преобразованием Фурье от гауссова функционала

$$F(\varphi) = \exp \left\{ i \int \frac{1}{2} \varphi(x) K(x-y) \varphi(y) dx dy \right\} \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n), \quad (5.3)$$

сам является гауссовым функционалом, так как при дифференцировании $\exp \left\{ \int \eta K^{-1} \eta dx dy \right\}$ мы получаем выражение, в котором эта экспонента множится на полином.

Мы покажем, что наше определение позволяет доказать для интеграла (5.1) справедливость простейших преобразований: интегрирования по частям, замены переменных, а также ввести понятие функциональной δ -функции.

1. Интегрирование по частям. Рассмотрим интеграл

$$I = \int \left[\frac{\delta}{\delta \varphi(z)} \exp \left\{ \frac{i}{2} \int \varphi(x) K(x-y) \varphi(y) dx dy \right\} \right] \times \\ \times \exp \left\{ i \int \varphi(x) \eta(x) dx \right\} \prod_x d\varphi. \quad (5.4)$$

Функционал

$$\frac{\delta}{\delta \varphi(z)} \exp \left\{ \frac{i}{2} \int \varphi(x) K(x-y) \varphi(y) dx dy \right\} \quad (5.5)$$

— гауссов, поэтому интеграл (5.4) имеет смысл и по определению равен

$$I = i \int \left[\int K(z-y) \varphi(y) dy \times \right. \\ \times \exp \left\{ \frac{i}{2} \int \varphi(x) K(x-y) \varphi(y) dx dy + i \int \varphi(x) \eta(x) dx \right\} \left. \right] \prod_x d\varphi = \\ = \int K(z-y) \frac{\delta}{\delta \eta(y)} Z(\eta) dy = -i\eta(z) Z(\eta). \quad (5.6)$$

С другой стороны,

$$-i\eta(z) Z(\eta) = - \int \exp \left\{ \frac{i}{2} \int \varphi(x) K(x-y) \varphi(y) dx dy \right\} \times \\ \times \frac{\delta}{\delta \varphi(z)} \exp \left\{ i \int \varphi(x) \eta(x) dx \right\} \prod_x d\varphi. \quad (5.7)$$

Сравнивая (5.4) и (5.6), видим, что имеет место формула интегрирования по частям, причем граничные члены отбрасываются. Этот результат очевидным образом обобщается на произвольный гауссов интеграл, поскольку любой такой интеграл представим в виде производной от I по η .

2. Повторные интегралы. Поскольку интеграл от гауссова функционала сам является гауссовым функционалом, можно определить повторный интеграл. Докажем, что

$$\int \exp \left\{ i \sum_{i,j=1}^n \frac{(K_n)_{ij}^{xy}}{2} \varphi_i^x \varphi_j^y + \sum_{j=1}^n \eta_j^x \varphi_j^x \right\} \prod_x d\varphi_1 \dots d\varphi_n =$$

$$= \exp \left\{ -\frac{i}{2} \sum_{i,j=1}^n (K_n^{-1})_{ij}^{xy} \eta_i^x \eta_j^y \right\} \quad (5.8)$$

(здесь мы используем сокращенные обозначения, подразумевая что по повторяющимся непрерывным индексам x, y проводится интегрирование).

Пусть равенство (5.8) справедливо для некоторого n . Докажем, что тогда оно верно и для номера $n+1$. По предположению,

$$I_{n+1} = \int \exp \left\{ -i \sum_{i,j=1}^n (\eta_i^x + K_{i n+1}^{xy} \varphi_{n+1}^y) \times \right.$$

$$\times \frac{(K_n^{-1})_{ij}^{xz}}{2} (\eta_j^z + K_{j n+1}^{zu} \varphi_{n+1}^u) +$$

$$\left. + \frac{i}{2} K_{n+1 n+1}^{xy} \varphi_{n+1}^x \varphi_{n+1}^y + i \eta_{n+1}^x \varphi_{n+1}^x \right\} \prod_x d\varphi_{n+1}. \quad (5.9)$$

Выполняя интегрирование по φ_{n+1} , получим

$$I_{n+1} = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \left(\eta_{n+1}^x - \sum_{i,j=1}^n K_{i n+1}^{xy} (K_n^{-1})_{ij}^{yz} \eta_j^z \right) \times \right.$$

$$\times \left(K_{n+1 n+1}^{zu} - \sum_{l,m=1}^n K_{l n+1}^{zv} (K_n^{-1})_{lm}^{vs} K_{m n+1}^{su} \right)^{-1} \times$$

$$\left. \times \left(\eta_{n+1}^u - \sum_{i,j=1}^n K_{i n+1}^{ur} (K_n^{-1})_{ij}^{rt} \eta_j^t \right) - \frac{i}{2} \sum_{i,j=1}^n \eta_i^x (K_n^{-1})_{ij}^{xy} \eta_j^y \right\}. \quad (5.10)$$

Воспользовавшись тем, что

$$(K^{-1})_{ij}^{xy} = (\det K^{-1})^{xz} \bar{K}_{ij}^{zy}, \quad (5.11)$$

где через $\bar{K}_{ij}$ обозначена адъюнкта элемента K_{ij} матрицы K , второй сомножитель в показателе экспоненты можно представить в виде

$$(\det K_n)^{zx} \left[(\det K_n)^{xy} K_{n+1}^{yu} - \sum_{i,j=1}^n K_{i n+1}^{xy} \bar{K}_{ij}^{yv} K_{j n+1}^{vu} \right]^{-1} = \\ = (\det K_n)^{zx} (\det K_{n+1}^{-1})^{xu}. \quad (5.12)$$

Рассмотрим отдельные члены в формуле (5.10):

$$\eta_{n+1}^x \eta_{n+1}^y (\det K_n)^{xz} (\det K_{n+1}^{-1})^{zy} = \eta_{n+1}^x (K_{n+1}^{-1})_{n+1}^{xy} \eta_{n+1}^y, \\ \sum_i \eta_{n+1}^x (\det K_{n+1}^{-1})^{xy} K_{i n+1}^{yz} \bar{K}_{ij}^{zu} \eta_j^u = \\ = \eta_{n+1}^x (\det K_{n+1}^{-1})^{xy} \bar{K}_{n+1}^{yz} \eta_j^z = \eta_{n+1}^x (K_{n+1}^{-1})_{n+1}^{xy} \eta_j^y. \quad (5.13)$$

Аналогичным образом можно показать, что коэффициент при $\eta_i \eta_j$ есть $(K_{n+1}^{-1})_{ij}^{xy}$. В итоге получаем

$$I_{n+1} = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \sum_{i,j=1} (K_{n+1}^{-1})_{ij}^{xy} \eta_i^x \eta_j^y \right\}, \quad (5.14)$$

что и требовалось доказать. Очевидно, что результат не зависит от порядка интегрирования, так как изменение порядка эквивалентно просто перестановке столбцов матрицы K . Таким образом, доказано, что повторные интегралы существуют, и результат не зависит от порядка интегрирования.

3. Определение δ -функции

$$\int \exp \left\{ i \int \eta(x) \left[\int c(x-y) \varphi(y) dy - \varphi'(x) \right] dx \right\} \prod_x d\eta \stackrel{\text{def}}{=} \\ \stackrel{\text{def}}{=} \delta \left(\varphi(x) - \int c^{-1}(x-y) \varphi'(y) dy \right). \quad (5.15)$$

Это равенство означает, что

$$\int F(\varphi) \left[\int \exp \left\{ i \int \eta(x) \left[\int c(x-y) \varphi(y) dy - \varphi'(x) \right] dx \right\} \times \right. \\ \times \left. \prod_x d\eta \right] \prod_x d\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \int \left[\int F(\varphi) \exp \left\{ i \int \eta(x) \left[\int c(x-y) \varphi(y) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \varphi'(x) \right] dx \right\} \prod_x d\varphi \prod_x d\eta \right] = F(c^{-1}\varphi'), \quad (5.16)$$

где $F(\varphi)$ — гауссов функционал (по аналогии с обычным определением δ -функции можно было бы ожидать, что в формуле (5.16) должен присутствовать еще постоянный, т. е. не зависящий от φ' , множитель $\det c^{-1}$. Отсутствие этого фактора в формуле (5.16) объясняется тем, что наше определение функционального интеграла (5.1) включает условие нормировки).

Равенство (5.16) проверяется непосредственным вычислением:

$$\begin{aligned} & \int \left[\int \exp \left\{ \frac{i}{2} \int \varphi(x) K(x-y) \varphi(y) dx dy \right\} \times \right. \\ & \times \exp \left\{ i \int \eta(x) \left[\int c(x-y) \varphi(y) dy - \varphi'(x) \right] dx \right\} \prod_x d\varphi \prod_x d\eta = \\ & = \exp \left\{ \frac{i}{2} \int \varphi'(x) c^{-1} K(x-y) c^{-1} \varphi'(y) dx dy \right\}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Покажем теперь, что

$$\int \exp \left\{ i \int [f_x(\varphi) - \varphi'(x)] \eta(x) dx \right\} \prod_x d\eta = \delta(f_x(\varphi) - \varphi'(x)), \quad (5.18)$$

$f_x(\varphi)$ как функция x принадлежит к тому же классу, что и $\varphi(x)$. Функция $f_x(\varphi)$ разложима в формальный ряд вида

$$\begin{aligned} f_x(\varphi) &= c_0(x) + \varphi(x) + \tilde{f}(\varphi), \\ \tilde{f}(\varphi) &= g \int c_1(x, y) \varphi(y) dy + \\ &+ g^2 \int c_2(x, y, z) \varphi(y) \varphi(z) dy dz + \dots \end{aligned} \quad (5.19)$$

(для простоты мы считаем, что коэффициент при φ в первой степени равен 1. Рассмотрение тривиально обобщается на случай $c \neq 1$ с помощью предыдущей формулы). При этом уравнение

$$c_0(x) + \varphi(x) + \tilde{f}(\varphi) - \varphi'(x) = 0 \quad (5.20)$$

имеет единственное решение, представимое в виде формального ряда по g .

Формула (5.18) означает, что

$$\int \left[F(\varphi) \exp \left\{ i \int [f_x(\varphi) - \varphi'(x)] \eta(x) dx \right\} \times \right. \\ \left. \times \det \left\{ 1 + \frac{\delta \tilde{f}}{\delta \varphi} \right\} \prod_x d\varphi \right] d\eta = F(\tilde{\varphi}), \quad (5.21)$$

где $\tilde{\varphi}(\varphi')$ — решение уравнения (5.20); $\det \left(1 + \frac{\delta \tilde{f}}{\delta \varphi} \right)$, по определению, есть

$$\det \left\{ 1 + \frac{\delta \tilde{f}}{\delta \varphi} \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \exp \left\{ \text{Tr} \ln \left[1 + \frac{\delta \tilde{f}(x)}{\delta \varphi(y)} \right] \right\} = \\ = \exp \left\{ \int \frac{\delta \tilde{f}(x)}{\delta \varphi(y)} \Big|_{x=y} dx + \frac{1}{2} \int dx dy \frac{\delta \tilde{f}(x)}{\delta \varphi(y)} \frac{\delta \tilde{f}(y)}{\delta \varphi(x)} + \dots \right\}. \quad (5.22)$$

Согласно определению

$$\int \left[\int \exp \left\{ \frac{i}{2} \int \varphi(x) K(x-y) \varphi(y) dx dy + \right. \right. \\ \left. \left. + i \int [f(\varphi) - \varphi'(x)] \eta(x) dx \right\} \det \left\{ 1 + \frac{\delta \tilde{f}}{\delta \varphi} \right\} \prod_x d\varphi \prod_x d\eta = \right. \\ = \int \left[\overrightarrow{\exp} \left\{ i \int \eta(x) \tilde{f} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta} \right) dx \right\} \det \left\{ 1 + \frac{\delta \tilde{f}}{\delta \varphi} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta} \right) \right\} \times \right. \\ \times \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int \eta(x) K^{-1}(x-y) \eta(y) dx dy \right\} \Big] \times \\ \left. \times \exp \left\{ -i \int [\varphi'(x) - c_0(x)] \eta(x) dx \right\} \prod_x d\eta. \right] \quad (5.23)$$

Значок $\rightarrow(\leftarrow)$ над экспонентой означает, что при представлении экспоненты в виде ряда все операторы $\delta/\delta\eta$ нужно поставить справа (слева) от η . Интегрируя по частям, преобразуем правую часть к виду

$$\int \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int \eta(x) K^{-1}(x-y) \eta(y) dx dy \right\} \times \\ \times \det \left\{ 1 + \frac{\delta \tilde{f}}{\delta \varphi} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta} \right) \right\} \overleftarrow{\exp} \left\{ i \int \tilde{f} \left(-\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta} \right) \eta(x) dx \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -i \int [\varphi'(x) - c_0(x)] \eta(x) dx \right\} \prod_x d\eta. \quad (5.24)$$

Рассмотрим функционал

$$\begin{aligned}
 B(\varphi', \eta) &= \\
 &= \det \left\{ 1 + \frac{\delta \tilde{f}}{\delta \varphi} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta} \right) \right\} \overleftarrow{\exp} \left\{ i \int \tilde{f} \left(-\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta} \right) \eta(x) dx \right\} \times \\
 &\quad \times \exp \left\{ -i \int [\varphi'(x) - c_0(x)] \eta(x) dx \right\} = \\
 &= \overleftarrow{\exp} \left\{ -i \int \frac{\delta}{\delta \varphi'(x)} \tilde{f}(\varphi' - c_0) dx \right\} \times \\
 &\quad \times \det \left\{ 1 + \frac{\delta \tilde{f}}{\delta \varphi} (\varphi' - c_0) \right\} \exp \left\{ -i \int [\varphi'(x) - c_0(x)] \eta(x) dx \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

$B(\varphi', \eta)$ удовлетворяет уравнению

$$\delta B / \delta \eta(x) = i \left[c_0(x) - \varphi'(x) + \tilde{f} \left(i \frac{\delta}{\delta \eta} \right) \right] B \tag{5.26}$$

с начальным условием

$$\begin{aligned}
 B(\varphi', 0) &= A(\varphi') = \exp \left\{ - \int \frac{\delta}{\delta \varphi'(x)} \tilde{f}(\varphi' - c_0) dx \right\} \times \\
 &\quad \times \det \left\{ 1 + \frac{\delta \tilde{f}}{\delta \varphi} (\varphi' - c_0) \right\} \cdot 1.
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Будем искать решение уравнения (5.26) в виде

$$B(\varphi', \eta) = A(\varphi') \exp \left\{ -i \int \varphi(\varphi') \eta(x) dx \right\}. \tag{5.28}$$

Подставляя (5.28) в (5.26), имеем

$$\varphi(x) = \varphi'(x) - c_0(x) - \tilde{f}(\varphi). \tag{5.29}$$

Следовательно, искомый интеграл равен

$$\begin{aligned}
 A(\varphi') &\int \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int \eta(x) K^{-1}(x-y) \eta(y) dx dy \right\} \times \\
 &\quad \times \exp \left\{ -i \int \tilde{\varphi}(x) \eta(x) dx \right\} \prod_x d\eta = \\
 &= A(\varphi') \exp \left\{ \frac{i}{2} \int \tilde{\varphi}(x) K(x-y) \tilde{\varphi}(y) dx dy \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Нам осталось лишь показать, что $A(\varphi') = 1$. Формулу (5.27) можно переписать в виде

$$A(\varphi') = \det \left[\overleftarrow{\exp} \left\{ -\frac{\delta}{\delta \varphi'(x)} \tilde{f}(\varphi' - c_0) \right\} \times \right. \\ \left. \times \left\{ 1 + \frac{\delta \tilde{f}}{\delta \varphi}(\varphi' - c_0) \right\} \right] \cdot 1 = \det \left[\sum_n \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\delta^n}{\delta \varphi'^n(x)} \times \right. \\ \left. \times \tilde{f}^n(\varphi' - c_0) \left\{ 1 + \frac{\delta \tilde{f}}{\delta \varphi'}(\varphi' - c_0) \right\} \right] \cdot 1. \quad (5.31)$$

Рассмотрим n -й член суммы, стоящей в квадратных скобках. Он представляет собой двучлен, первое слагаемое которого можно представить в виде

$$\frac{(-1)^n}{n!} \frac{\delta^n}{\delta \varphi'^n} \tilde{f}^n(\varphi') = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \frac{\delta^{n-1}}{\delta \varphi'^{n-1}} \left(\frac{\delta \tilde{f}}{\delta \varphi'} \tilde{f}^{n-1}(\varphi') \right). \quad (5.32)$$

С другой стороны, $n-1$ -й член суммы в квадратных скобках представляет собой аналогичный двучлен, второе слагаемое которого равно

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\delta^{n-1}}{\delta \varphi'^{n-1}} \left(\frac{\delta \tilde{f}}{\delta \varphi'} \tilde{f}^{n-1}(\varphi') \right). \quad (5.33)$$

Таким образом, последовательные слагаемые в квадратных скобках взаимно компенсируются, и все выражение равно единице.

4. Замена переменных. Пусть

$$I = \int \exp \left\{ \frac{i}{2} \int \varphi(x) K(x-y) \varphi(y) dx dy + \right. \\ \left. + i \int \varphi(x) \eta(x) dx \right\} \prod_x d\varphi. \quad (5.34)$$

Заменой переменных

$$\varphi = f_x(\varphi'), \quad f_x(\varphi') = c_0(x) + \varphi'(x) + \tilde{f}(\varphi'), \quad (5.35)$$

I приводится к виду

$$I = \int \exp \left\{ \frac{i}{2} \int f_x(\varphi') K(x-y) f_y(\varphi') dx dy + \right. \\ \left. + i \int f_x(\varphi') \eta(x) dx \right\} \det \left\{ 1 + \frac{\delta \tilde{f}}{\delta \varphi'} \right\} \prod_x d\varphi'. \quad (5.36)$$

Чтобы доказать это утверждение, достаточно убедиться в равенстве фурье-образов (5.34) и (5.36). Фурье-образ (5.34) есть

$$\exp \left\{ \frac{i}{2} \int \psi(x) K(x-y) \psi(y) dx dy \right\}. \quad (5.37)$$

Фурье-образ (5.36) равен

$$\begin{aligned} \tilde{I}(\psi) &= \int I(\eta) \exp \left\{ -i \int \eta(x) \psi(x) dx \right\} \prod_x d\eta = \\ &= \exp \left\{ \frac{i}{2} \int f_x K(x-y) f_y dx dy \right\} \det \left\{ 1 + \frac{\delta \tilde{f}}{\delta \varphi'} \right\} \times \\ &\times \delta(\psi - f(\varphi')) \prod_x d\varphi' = \exp \left\{ \frac{i}{2} \int \psi(x) K(x-y) \psi(y) dx dy \right\}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Утверждение доказано.

Наше рассмотрение показывает, что все те свойства интеграла Фейнмана, которыми практически приходится пользоваться в теории возмущений, вытекают непосредственно из определения квазигауссова интеграла и могут быть строго обоснованы независимо от вопроса о существовании фейнмановской интегральной меры. Таким образом, в рамках теории возмущений формализм континуального интеграла является вполне строгим математическим методом, и полученные с его помощью результаты не нуждаются в дополнительном обосновании.

Все эти выводы в равной мере относятся и к континуальным интегралам, содержащим фермиевские переменные. В этом случае следует помнить об антикоммутивности вариационных производных и в формулах замены переменных соответствующий детерминант писать в знаменателе вместо числителя. Эта отличительная черта гауссовых интегралов по ферми-переменным уже обсуждалась выше.



КВАНТОВАНИЕ ПОЛЯ ЯНГА — МИЛЛСА

§ 1. Лагранжиан поля Янга — Миллса и специфика его квантования

В предыдущей главе мы сформулировали правила квантования при помощи континуального интеграла на примере скалярного и спинорного полей. На первый взгляд поле Янга — Миллса можно было бы квантовать аналогичным образом, рассматривая каждую компоненту этого поля как скалярное поле. Это, однако, не так. Калибровочная инвариантность вносит специфические черты в процедуру квантования. Спинорные и скалярные поля, с которыми взаимодействует поле Янга — Миллса, не влияют на эту специфику. Поэтому в ближайших трех параграфах мы ограничимся обсуждением поля Янга — Миллса в пустоте.

Напомним некоторые обозначения, введенные в первой главе. Пусть Ω — компактная группа внутренней симметрии, T^a ($a = 1, \dots, n$) — ее ортонормированные генераторы в присоединенном представлении, f^{abc} — соответствующие структурные константы, и

$$\mathcal{A}_\mu = A_\mu^a T^a \quad (1.1)$$

— поле Янга — Миллса. Калибровочное преобразование задается матрицей $\omega(x)$ со значениями в присоединенном представлении группы:

$$\mathcal{A}_\mu(x) \rightarrow \mathcal{A}_\mu^\omega(x) = \omega(x) \mathcal{A}_\mu(x) \omega^{-1}(x) + \partial_\mu \omega(x) \omega^{-1}(x). \quad (1.2)$$

Калибровочно-инвариантный лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8g^2} \text{tr} \{ \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} \}, \quad (1.3)$$

где

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]. \quad (1.4)$$

Уравнения движения

$$\nabla_\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} - [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{F}_{\mu\nu}] = 0 \quad (1.5)$$

представляют собой уравнения второго порядка относительно $\mathcal{A}_\mu$ и калибровочно-ковариантны: если $\mathcal{A}_\mu(x)$ — решение уравнений движения, то для любой $\omega(x)$ решением будет и $\mathcal{A}_\mu^\omega(x)$, где ω произвольным образом зависит от x . Это значит, что уравнения движения (1.5) не независимы. И действительно, нетрудно проверить, что

$$\nabla_\nu \nabla_\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} = 0. \quad (1.6)$$

Для доказательства представим $\nabla_\nu \nabla_\mu$ в виде

$$\nabla_\nu \nabla_\mu = \frac{1}{2} (\nabla_\nu \nabla_\mu + \nabla_\mu \nabla_\nu) + \frac{1}{2} (\nabla_\nu \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu). \quad (1.7)$$

Вспомним, что для любой матрицы $\mathcal{B}(x)$ в присоединенном представлении

$$(\nabla_\nu \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu) \mathcal{B}(x) = [\mathcal{F}_{\mu\nu}, \mathcal{B}]. \quad (1.8)$$

В силу антисимметрии $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ по μ и ν получаем

$$\nabla_\nu \nabla_\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\mathcal{F}_{\mu\nu}, \mathcal{F}_{\mu\nu}] = 0. \quad (1.9)$$

Тождество (1.9) является частным случаем второй теоремы Нетер, утверждающей, что из инвариантности функции Лагранжа относительно преобразований, зависящих от произвольной функции, следует линейная зависимость уравнений движения.

Отмеченная специфика уравнений движения проявляется и при их квантовании. Действительно, некоторые из функций, параметризующих классическое решение, произвольным образом зависят от времени и не подчиняются динамике. При квантовании мы должны разделить истинные динамические переменные и групповые параметры. Этой задачей мы будем заниматься в следующем параграфе.

Покажем теперь, почему не проходит наивный перенос правил построения теории возмущений, разработанных в предыдущей главе, на случай полей Янга — Миллса. Согласно рецепту главы II при заданном

лагранжиане $\mathcal{L}$ для построения теории возмущений мы должны представить его в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (1.10)$$

где $\mathcal{L}_0$ — квадратичная форма по полям, а $\mathcal{L}_{\text{int}}$ содержит формы, более высокие по полям. Одночлены в $\mathcal{L}_{\text{int}}$ определяют вершины с тремя и более концами, а $\mathcal{L}_0$ определяет функции распространения, отвечающие внутренним линиям. А именно, функция распространения является ядром интегрального оператора, обратного дифференциальному оператору, определяющему квадратичную форму $\mathcal{L}_0$.

Для лагранжиана поля Янга — Миллса $\mathcal{L}_0$ с точностью до несущественной дивергенции имеет вид (в нормировке $\mathcal{A}_\mu \rightarrow g\mathcal{A}_\mu$)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= -\frac{1}{4} (\partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a) (\partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a) = \\ &= -\frac{1}{2} [\partial_\mu A_\nu^a \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\mu A_\mu^a \partial_\nu A_\nu^a]. \end{aligned} \quad (1.11)$$

В импульсном представлении квадратичная форма $\mathcal{L}_0$ задается выражением

$$K_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta^{ab} (g_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu). \quad (1.12)$$

Этот оператор не имеет обратного, и следовательно, функция распространения не определена. Причина этого состоит в том, что, как уже отмечалось, не все компоненты поля Янга — Миллса являются независимыми динамическими переменными. Аналогичное затруднение возникает, как известно, в квантовой электродинамике. В этом случае используется формализм Гупта — Блейлера, который рецептурно сводится к следующему: в качестве пропагатора фотона выбирается функция

$$D_{\mu\nu}(k^2) = -\frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i0}, \quad (1.13)$$

и показывается, что построенная с его помощью S -матрица унитарна.

Обобщая этот рецепт, можно было бы попробовать строить теорию Янга — Миллса, используя пропагатор

$$D_{\mu\nu}^{ab} = -\frac{\delta^{ab} g_{\mu\nu}}{k^2 + i0}. \quad (1.14)$$

Однако, как показал впервые Фейнман, такое построение теории возмущений недопустимо. Вычисленная с таким пропагатором S -матрица не унитарна. Поэтому необходимо пересмотреть вывод правил теорий возмущений, отправляясь от причинного описания динамики классических полей поля Янга — Миллса, в качестве которой удобнее всего использовать гамильтонову формулировку этой теории.

§ 2. Гамильтонова формулировка поля Янга — Миллса и его квантование

Для того чтобы построить корректную процедуру квантования, мы должны прежде всего найти истинные динамические переменные для поля Янга — Миллса и убедиться, что они меняются со временем по законам гамильтоновой динамики. После этого мы сможем воспользоваться для построения оператора эволюции развитым в предыдущей главе формализмом континуального интегрирования. Рассмотрим более подробно структуру функции Лагранжа поля Янга — Миллса. Удобно использовать функцию Лагранжа в формализме первого порядка:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \text{tr} \left\{ \left(\partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu + g [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] - \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} \right) \mathcal{F}_{\mu\nu} \right\}, \quad (2.1)$$

где $\mathcal{A}_\mu$ и $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ считаются независимыми переменными. Очевидно, что этот лагранжиан и следующие из него уравнения движения эквивалентны лагранжиану (1.3).

В трехмерных обозначениях ($\mu = 0, k; \nu = 0, l; k, l = 1, 2, 3$) мы можем переписать лагранжиан в виде (с точностью до дивергенции)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \mathcal{E}_k \partial_0 \mathcal{A}_k - \frac{1}{2} (\mathcal{E}_k^2 + \mathcal{G}_k^2) + \mathcal{A}_0 \mathcal{C} \right\}, \quad (2.2)$$

где

$$\mathcal{E}_k = \mathcal{F}_{k0}, \quad \mathcal{G}_k = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \mathcal{F}_{ji}, \quad \mathcal{C} = \partial_k \mathcal{E}_k - g [\mathcal{A}_k, \mathcal{E}_k] \quad (2.3)$$

и мы считаем, что $\mathcal{F}_{ik}$ выражено через $\mathcal{A}_i$ с помощью уравнений движения, не содержащих производных по времени

$$\mathcal{F}_{ik} = \partial_k \mathcal{A}_i - \partial_i \mathcal{A}_k + g [\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k]. \quad (2.4)$$

Этот же лагранжиан можно записать в виде

$$\mathcal{L} = E_k^a \partial_0 A_k^a - h(E_k, A_k) + A_0^a C^a, \quad h = \frac{1}{2} \{ (E_k^a)^2 + (G_k^a)^2 \}. \quad (2.5)$$

Из вида лагранжиана (2.5) ясно, что пары (E_k^a, A_k^a) являются каноническими переменными, h — гамильтониан A_0^a — множитель Лагранжа, C^a — связь на канонические переменные. Вводя скобки Пуассона

$$\{E_k^a(x), A_l^b(y)\} = \delta_{kl} \delta^{ab} \delta(x - y), \quad (2.6)$$

нетрудно проверить, что

$$\{C^a(x), C^b(y)\} = g t^{abc} C^c(x) \delta(x - y) \quad (2.7)$$

и что

$$\left\{ \int d^3x [(E_k^a)^2 + (G_k^a)^2], C^b(y) \right\} = 0. \quad (2.8)$$

Это означает, что наша система представляет собой пример так называемой обобщенной гамильтоновой динамики. Это понятие было введено Дираком. Рассмотрим его на примере системы с n степенями свободы. Пусть p_i и q_i ее канонические переменные, пробегающие фазовое пространство Γ^{2n} , а действие имеет вид

$$A = \int \left[\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - h(p, q) - \sum \lambda^\alpha \varphi^\alpha(p, q) \right] dt; \quad (2.9)$$

$$\alpha = 1 \dots m; \quad m < n.$$

Здесь дополнительные к p и q переменные λ^α называются множителями Лагранжа, а φ^α — связи. Такое действие определяет обобщенную гамильтонову систему, если выполняются условия

$$\{h, \varphi^\alpha\} = c^{\alpha\beta}(p, q) \varphi^\beta; \quad \{\varphi^\alpha, \varphi^\beta\} = \sum_\gamma c^{\alpha\beta\gamma}(p, q) \varphi^\gamma \quad (2.10)$$

с некоторыми коэффициентами $c^{\alpha\beta}$ и $c^{\alpha\beta\gamma}$, вообще говоря, зависящими от p, q . Обобщенная гамильтонова система эквивалентна обычной гамильтоновой системе Γ^* с $n - m$ степенями свободы. Фазовое пространство $\Gamma^{*2(n-m)}$ последней системы можно реализовать следующим образом. Рассмотрим m дополнительных условий

$$\chi^m(p, q) = 0, \quad (2.11)$$

для которых выполняются требования

$$\det | \{\varphi^\alpha, \chi^\beta\} | \neq 0, \quad (2.12)$$

$$\{\chi^\alpha, \chi^\beta\} = 0. \quad (2.13)$$

Тогда подпространство в Γ^{2n}

$$\chi^\alpha(p, q) = 0, \quad \varphi^\alpha(p, q) = 0 \quad (2.14)$$

представляет собой искомое пространство $\Gamma^{*2(n-m)}$. Канонические переменные p^*, q^* в $\Gamma^{*2(n-m)}$ можно найти следующим образом. Вследствие условия (2.13) мы можем выбрать канонические переменные в Γ^{2n} так, что χ^α будут совпадать с первыми m переменными типа координат

$$q = (\chi^\alpha, q^*). \quad (2.15)$$

Пусть

$$p = (p^\alpha, p^*) \quad (2.16)$$

— соответствующие сопряженные импульсы. Условие (2.12) в этих переменных имеет вид

$$\det \left| \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial p^\beta} \right| \neq 0, \quad (2.17)$$

так что уравнения связей

$$\varphi^\alpha(p, q) = 0 \quad (2.18)$$

можно решить относительно p^α . В результате подпространство $\Gamma^{*2(n-m)}$ задается уравнениями

$$\chi^\alpha \equiv q^\alpha = 0; \quad p^\alpha = p^\alpha(p^*, q^*) \quad (2.19)$$

и p^*, q^* являются каноническими. Гамильтонианом этой системы является функция

$$h^*(p^*, q^*) = h(p, q) |_{\varphi=0, \chi=0}. \quad (2.20)$$

Эквивалентность систем Γ и Γ^* означает следующее. Рассмотрим уравнения движения для системы Γ

$$\dot{p}_i + \frac{\partial h}{\partial q_i} + \lambda^\alpha \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial q_i} = 0, \quad \dot{q}_i - \frac{\partial h}{\partial p_i} - \lambda^\alpha \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial p_i} = 0, \quad (2.21)$$

$$\varphi^\alpha = 0.$$

Решения этих уравнений содержат произвольные функции $\lambda^\alpha(t)$. Дополнительные условия $\chi^\alpha(p, q) = 0$

уничтожают этот произвол, выражая $\lambda^\alpha(t)$ через канонические переменные. В результате в качестве уравнений движения остаются уравнения для переменных p^* , q^* . Эти уравнения совпадают с гамильтоновыми уравнениями для системы Γ^*

$$\dot{q}^* = \frac{\partial h^*}{\partial p^*}; \quad \dot{p}^* = -\frac{\partial h^*}{\partial q^*}. \quad (2.22)$$

Действительно, рассмотрим уравнение (2.19), (2.21) в координатах (2.15), (2.16). Уравнения $\dot{q}^\alpha = 0$ приводят к соотношениям, позволяющим найти λ^α :

$$\frac{\partial h}{\partial p_\alpha} + \lambda^\beta \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial p_\alpha} = 0. \quad (2.23)$$

Рассмотрим теперь какую-нибудь из координат q^* , и сравним уравнения для нее, следующие из (2.19), (2.21) и (2.22). Они имеют вид

$$\dot{q}^* = \frac{\partial h}{\partial p^*} + \lambda^\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial p^*}, \quad (2.24)$$

$$\dot{q}^* = \frac{\partial h^*}{\partial p^*} = \frac{\partial h}{\partial p^*} + \frac{\partial h}{\partial p_\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial p^*} \quad (2.25)$$

соответственно. Правые части этих уравнений совпадают, если

$$\lambda^\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial p^*} = \frac{\partial h}{\partial p_\alpha} \frac{\partial p_\alpha}{\partial p^*}. \quad (2.26)$$

Используя уравнение (2.23), это условие можно переписать в виде

$$\lambda^\alpha \left(\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial p^*} + \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial p_\beta} \frac{\partial p_\beta}{\partial p^*} \right) = 0. \quad (2.27)$$

Это равенство выполняется в силу условия связи $\Phi_\alpha = 0$. Переменные p^* рассматриваются аналогично. Утверждение доказано.

Изменение выбора дополнительных условий сводится к каноническому преобразованию в пространстве $\Gamma^{*2(n-m)}$, и поэтому не влияет на физику задачи.

Для квантования системы Γ можно использовать независимые переменные p^* , q^* . Тогда оператор эволюции будет задаваться континуальным интегралом

$$\int \exp \left\{ i \int [p^* \dot{q}^* - h(p^*, q^*)] dt \right\} \prod_t \frac{dp^* dq^*}{(2\pi)}, \quad (2.28)$$

где фиксируются начальные и конечные значения координат q^* . Однако на практике связи не всегда легко решить. Поэтому желательно уметь работать непосредственно в терминах обобщенной системы Г. Нетрудно убедиться, что континуальный интеграл

$$\left\{ \exp \left\{ i \int [p_i \dot{q}_i - h(p, q) - \lambda^\alpha \varphi^\alpha(p, q)] dt \right\} \times \right. \\ \left. \times \prod_{t, \alpha} \delta(\chi^\alpha) \prod_t \det | \{ \varphi_\alpha, \chi_\beta \} | \prod_t \frac{dp dq}{2\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} \right\} \quad (2.29)$$

совпадает с интегралом (2.28). Действительно, интегрируя по λ , формулу (2.29) можно переписать в виде

$$\int \exp \left\{ i \int [p_i \dot{q}_i - h(p, q)] dt \right\} \times \\ \times \prod_{t, \alpha} \delta(\chi^\alpha) \delta(\varphi^\alpha) \prod_t \det | \{ \varphi_\alpha, \chi_\beta \} | \prod_t \frac{dp dq}{2\pi}. \quad (2.30)$$

В переменных $p^\alpha, q^\alpha, p^*, q^*$ множитель

$$\prod_t \delta(\varphi_\alpha) \delta(\chi_\alpha) \det | \{ \varphi_\alpha, \chi_\beta \} | \quad (2.31)$$

переписывается в виде

$$\prod_t \delta(\varphi_\alpha) \delta(q_\alpha) \det \left| \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial p_\beta} \right| = \prod_t \delta(q_\alpha) \delta[p_\alpha - p_\alpha(p^*, q^*)]. \quad (2.32)$$

В результате после интегрирования по p_α и q_α интеграл (2.29) сводится к (2.28).

Сравнение формул (2.5) — (2.8) и (2.9), (2.10) показывает, что поле Янга — Миллса действительно представляет собой обобщенную гамильтонову систему. Применим для ее квантования описанную только что процедуру.

Ясно, что роль дополнительного условия в этом случае должно играть условие калибровки. В качестве такого условия мы выберем соотношение

$$\partial_k \mathcal{A}_k = 0. \quad (2.33)$$

Это условие допустимо. Действительно, очевидно, что

$$\{ \partial_k A_k^a(x), \partial_i A_i^b(y) \} = 0. \quad (2.34)$$

Далее

$$\{C^a(x), \partial_k A_k^b(y)\} = \partial_k [\partial_k \delta^{ab} - g t^{abc} A_k^c(x)] \delta(x - y). \quad (2.35)$$

Оператор $M_c = \Delta \delta^{ab} - g t^{abc} A_k^c(x) \partial_k$ в рамках теории возмущений обратим. Обратный оператор M_c^{-1} является интегральным оператором, ядро которого $M_c^{-1}(x, y)$ определено интегральным уравнением

$$M_c^{-1ab}(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta^{ab}}{|x - y|} + g \int \frac{dz}{4\pi} t^{acd} \frac{A_k^c(z)}{|x - z|} \partial_k M_c^{-1db}(z, y) \quad (2.36)$$

и может быть вычислено итерациями в виде формального ряда по g . (Заметим, что для больших полей A_k оператор M_c может иметь нулевое собственное значение, так что M_c^{-1} перестанет существовать. Этот вопрос, однако, выходит за рамки теории возмущений, и мы не будем его здесь обсуждать.)

Вид дополнительного условия (2.33) подсказывает, что для нахождения координат q^* удобно использовать ортогональное разложение $\mathcal{A}_k$

$$\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_k^L + \mathcal{A}_k^T \quad (2.37)$$

на продольную и поперечную компоненты. Здесь

$$\mathcal{A}_k^L = \partial_k \mathcal{B}(x); \quad \mathcal{B}(x) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|x - y|} \partial_k \mathcal{A}_k(y) dy, \quad (2.38)$$

где

$$\partial_k \mathcal{A}_k^T = 0. \quad (2.39)$$

Ясно, что роль q^* играют поперечные компоненты $\mathcal{A}_k^T(x)$. Сопряженные с ними импульсы — это поперечные составляющие $\mathcal{E}_k^T(x)$. Уравнение связи представляет собой уравнение для продольной части $\mathcal{E}_k^L(x)$. Если положить

$$\mathcal{E}_k^L(x) = \partial_k \mathcal{Q}(x), \quad (2.40)$$

то уравнение связи запишется в виде

$$\Delta \mathcal{Q} - g [\mathcal{A}_k, \partial_k \mathcal{Q}] - g [\mathcal{A}_k, \mathcal{E}_k^T] = 0, \quad (2.41)$$

в котором участвует уже знакомый нам оператор M_c . Это уравнение позволяет выразить продольную состав-

ляющую $\mathcal{E}_k^L$ через $\mathcal{E}_k^T$ и $\mathcal{A}_k^T$. После подстановки решения в гамильтониан $h(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ мы получим гамильтониан $h^*(\mathcal{A}^T, \mathcal{E}^T)$ в виде бесконечного ряда по константе g . Переменные $\mathcal{A}^T$, $\mathcal{E}^T$ и гамильтониан h^* являются истинными гамильтоновыми переменными для поля Янга — Миллса. Полевая конфигурация $\mathcal{A}^T$ при фиксированном времени t задается двумя функциями от x . Это значит, что поле Янга — Миллса имеет два возможных состояния поляризации.

Теперь мы можем написать S -матрицу для поля Янга — Миллса через континуальный интеграл

$$S = \lim_{\substack{t'' \rightarrow \infty \\ t' \rightarrow -\infty}} \int \exp \left\{ i \int d^3k \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1,2} a_i^{*b}(\mathbf{k}, t'') a_i^b(\mathbf{k}, t'') + \right. \right. \\ \left. \left. + a_i^{*b}(\mathbf{k}, t') a_i^b(\mathbf{k}, t') \right] + i \int_{t'}^{t''} dt \int d^3x \left[\left(-\frac{1}{4} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \text{tr} [\mathcal{E}_l^T(\mathbf{x}, t) \dot{\mathcal{A}}_l^T(\mathbf{x}, t) - \dot{\mathcal{E}}_l^T(\mathbf{x}, t) \mathcal{A}_l^T(\mathbf{x}, t)] - \right. \right. \\ \left. \left. - h^*(\mathcal{E}^T, \mathcal{A}^T) \right] \right\} \prod \frac{da_i^*(\mathbf{k}, t) da_i(\mathbf{k}, t)}{2\pi i}, \quad (2.42)$$

где

$$A_l^{T,b}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \sum_{i=1,2} \int [e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} a_i^b(\mathbf{k}, t) u_l^i(\mathbf{k}) + \\ + e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} a_i^{*b}(\mathbf{k}, t) u_l^i(-\mathbf{k})] \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}}, \quad (2.43)$$

$$E_l^{T,b}(\mathbf{x}, t) = \frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \sum_{i=1,2} \int [-e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} a_i^b(\mathbf{k}, t) u_l^i(\mathbf{k}) + \\ + e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} a_i^{*b}(\mathbf{k}, t) u_l^i(-\mathbf{k})] \frac{\sqrt{\omega} d^3k}{\sqrt{2}}$$

и $u_l^i(\mathbf{k})$, $i = 1, 2$ — два вектора поляризации, в качестве которых можно взять два произвольных ортонормированных вектора, ортогональных вектору $\mathbf{k}$. Здесь считается, что выполняются асимптотические условия

$$a_i^{*b}(\mathbf{k}, t'') \xrightarrow{t'' \rightarrow \infty} e^{i\omega t''} a_i^{*b}(\mathbf{k}); \quad a_i^b(\mathbf{k}, t') \xrightarrow{t' \rightarrow -\infty} e^{-i\omega t'} a_i^b(\mathbf{k}). \quad (2.44)$$

Эта формула не очень удобна для построения диаграммной техники, поскольку гамильтониан h^* известен лишь в виде ряда по константе g и порождает к тому же нелокальные по пространственным координатам вершины. Конечно, это чисто техническая трудность, но она сильно затрудняет практические вычисления, в частности, проведение программы перенормировок. Отмеченный недостаток исчезает, если мы воспользуемся представлением для S -матрицы в виде интеграла по всем функциям $\mathcal{A}_i(\mathbf{k}, t)$, $\mathcal{E}_i(\mathbf{k}, t)$:

$$\begin{aligned}
 S = & \lim_{\substack{t'' \rightarrow \infty \\ t' \rightarrow -\infty}} \int \exp \left\{ i \int d^3k \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1,2} a_i^{*b}(\mathbf{k}, t'') a_i^b(\mathbf{k}, t'') + \right. \right. \\
 & \left. \left. + a_i^{*b}(\mathbf{k}, t') a_i^b(\mathbf{k}, t') \right] + i \int_{t'}^{t''} dt \int d^3x \times \right. \\
 & \times \left(-\frac{1}{4} \right) \text{tr} [\mathcal{E}_i(\mathbf{x}, t) \dot{\mathcal{A}}_i(\mathbf{x}, t) - \dot{\mathcal{E}}_i(\mathbf{x}, t) \mathcal{A}_i(\mathbf{x}, t) - \\
 & - \mathcal{E}_i^2(\mathbf{x}, t) - \mathcal{G}_i^2(\mathbf{x}, t) + 2\mathcal{A}_0(\partial_i \mathcal{E}_i - g[\mathcal{A}_i, \mathcal{E}_i])] \left. \right\} \times \\
 & \times \prod_{\mathbf{x}, t} \delta(\partial_i \mathcal{A}_i) \det M_C[\mathcal{A}] \prod_{\mathbf{x}, t} d\mathcal{A}_i d\mathcal{E}_i d\mathcal{A}_0. \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

Здесь граничные члены $a_i^*(\mathbf{k}, t'')$, $a_i(\mathbf{k}, t')$ определены теми же формулами, что и выше, т. е. строятся по поперечным полям $\mathcal{A}_i^T$.

Теперь мы можем проинтегрировать по импульсам $\mathcal{E}_k$ с учетом граничных условий, так же как мы сделали в главе II для случая скалярного поля. В результате получаем для нормального символа S -матрицы

$$\begin{aligned}
 S = & N^{-1} \int \exp \left\{ i \int dx \left[\frac{1}{8} \text{tr} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} \right] \right\} \times \\
 & \times \prod_{\mathbf{x}} \delta(\partial_k \mathcal{A}_k) \prod_t \det M_C[\mathcal{A}] \prod_{\mathbf{x}} d\mathcal{A}_\mu, \quad (2.46)
 \end{aligned}$$

где интегрирование ведется по всем полям $\mathcal{A}_\mu(\mathbf{x})$, причем фиксировано асимптотическое поведение их

трехмерно поперечных частей

$$\mathcal{A}_l^T(x)_{t \rightarrow \pm \infty} \rightarrow \mathcal{A}_{l, \text{in}}^T(x); \quad (2.47)$$

$$A_{l, \text{in}}^{T, b} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{i=1, 2} \int \left[a_{i, \text{in}}^b(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega t} u_l^i(\mathbf{k}) + \right. \\ \left. + a_{i, \text{in}}^{*b}(\mathbf{k})^{-i\mathbf{k}\mathbf{x} + i\omega t} u_l^i(\mathbf{k}) \right] \frac{d^3 k}{\sqrt{2k_0}},$$

$$a_{i, \text{in}}^b(\mathbf{k}) = a_i^b(\mathbf{k}), \quad a_{i, \text{out}}^{*b}(\mathbf{k}) = a_i^{*b}(\mathbf{k}), \quad i = 1, 2$$

и соответствующим образом доопределена квадратичная форма действия. В формуле (2.46), так же как и в случае скалярного поля, интегрируется фейнмановский функционал $\exp\{i \times \text{действие}\}$. Однако интегрирование ведется не по всем полям. Мера интегрирования явно содержит δ -функцию от калибровочного условия. Это является проявлением принципа относительности, согласно которому нужно интегрировать не по всем полям, а лишь по классам калибровочно-эквивалентных полей; δ -функция отбирает по одному представителю в каждом классе, а определитель обеспечивает правильную нормировку меры интегрирования. Асимптотические условия также согласованы с выбором калибровочного условия.

Разложение интеграла (2.46) в ряд теории возмущений порождает диаграммную технику. Пропагатор определяется гауссовым интегралом

$$I(J) = N^{-1} \int \exp \left\{ i \int dx \operatorname{tr} \left[\frac{1}{8} (\partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu)^2 - \frac{1}{2} \mathcal{J}_\mu \mathcal{A}_\mu \right] \right\} \times \\ \times \prod_x \delta(\partial_k \mathcal{A}_k) d\mathcal{A}_\mu \quad (2.48)$$

с фейнмановскими граничными условиями на $\mathcal{A}_k^T$. Этот интеграл равен

$$\exp \left\{ \frac{i}{2} \int J_\mu^a(x) D_{\mu\nu}^c(x-y) J_\nu^a(y) dx dy \right\}, \quad (2.49)$$

где $D_{\mu\nu}^c$ — искомый пропагатор:

$$\begin{aligned} D_{ml}^c(x) &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ikx} \left(\delta^{ml} - \frac{k_m k_l}{|k|^2} \right) (k^2 + i0)^{-1} dk, \\ D_{m0}^c(x) &= D_{0m}^c(x) = 0; \\ D_{00}^c(x) &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ikx} \frac{1}{|k|^2} dk. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Для доказательства воспользуемся интегральным представлением δ -функции (II. 5.18). Тогда $I(J)$ задается гауссовым интегралом

$$I(J) = N^{-1} \int \exp \left\{ i \int dx \left[-\frac{1}{4} (\partial_\nu A_\mu^l - \partial_\mu A_\nu^l)^2 + J_\mu^l A_\mu^l + \lambda^l \partial_k A_k^l \right] \right\} \prod_x dA_\mu d\lambda, \quad (2.51)$$

для вычисления которого надо найти экстремальное значение показателя экспоненты. Уравнения

$$\begin{aligned} \partial_\nu (\partial_\nu A_k^l - \partial_k A_\nu^l) + J_k^l + \partial_k \lambda^l &= 0, \\ \partial_\nu (\partial_\nu A_0^l - \partial_0 A_\nu^l) + J_0^l &= 0; \quad \partial_k A_k^l = 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

переписываются в виде

$$\begin{aligned} \square A_k^l + (\partial_k \lambda^l + \partial_0 \partial_k A_0^l) + J_k^l &= 0, \\ \triangle A_0^l - J_0^l &= 0; \quad \partial_k A_k^l = 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

и однозначно решаются при сформулированных выше граничных условиях. При этом можно считать, что источник J удовлетворяет условию поперечности

$$\partial_k J_k^l = 0. \quad (2.54)$$

В результате решение дается формулой

$$A_\mu^l(x) = \int D_{\mu\nu}^c(x-y) J_\nu^l(y) dy, \quad (2.55)$$

где $D_{\mu\nu}^c(x)$ — только что введенная кулоновская функция распространения.

Явное выражение для $D_{\mu\nu}^c$ показывает, что распространяются во времени только трехмерно поперечные составляющие $\mathcal{A}_\mu$, что согласуется с нашими граничными условиями.

Недостатком диаграммной техники в кулоновской калибровке является отсутствие явной релятивистской инвариантности. В следующем параграфе мы покажем, что в интеграле (2.46), определяющем S -матрицу, можно перейти к явно ковариантной калибровке.

Мы закончим этот параграф описанием альтернативной гамильтоновой формулировки теории Янга — Миллса, используя калибровочное условие $A_0 = 0$. Эта калибровка выгодно отличается от кулоновской тем, что она является допустимой и вне рамок теории возмущений. Покажем, что в каждом классе калибровочно-эквивалентных полей содержится поле, удовлетворяющее условию

$$\mathcal{A}_0 = 0. \quad (2.56)$$

Для этого заметим, что уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega(\mathbf{x}, t) = -\omega(\mathbf{x}, t) \mathcal{A}_0(\mathbf{x}, t) \quad (2.57)$$

допускает решение вида

$$\omega_0(\mathbf{x}, t) = T \exp \left\{ - \int_{-\infty}^t \mathcal{A}_0(\mathbf{x}, s) ds \right\}, \quad (2.58)$$

где символ T означает, что экспоненту надо упорядочить по времени. Из уравнения (2.57) следует, что

$$\mathcal{A}_\mu^{\omega_0} = \omega_0 \mathcal{A}_\mu \omega_0^{-1} + \partial_\mu \omega_0 \omega_0^{-1} \quad (2.59)$$

удовлетворяет условию

$$\mathcal{A}_0^{\omega_0} = 0. \quad (2.60)$$

Наряду с матрицей $\omega_0(\mathbf{x})$ аналогичным свойством обладают матрицы $\omega(\mathbf{x})$ вида

$$\omega(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}) \omega_0(\mathbf{x}), \quad (2.61)$$

где $\omega(\mathbf{x})$ — произвольная матрица из Ω , зависящая только от пространственных координат. Таким образом, гамильтонова калибровка не уничтожает полностью калибровочный произвол в определении поля Янга — Миллса, а сводит калибровочную группу к группе матриц $\omega(\mathbf{x})$.

Покажем теперь, что уравнения движения в калибровке $\mathcal{A}_0 = 0$ фактически являются гамильтоновыми. Для этого удобно использовать формулировку уравнений движения в виде уравнений первого порядка, следующими из лагранжиана (2.1):

$$\begin{aligned}\partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu + g [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] - \mathcal{F}_{\mu\nu} &= 0, \\ \partial_\mu \mathcal{F}_{\mu\nu} - g [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{F}_{\mu\nu}] &= 0.\end{aligned}\tag{2.62}$$

Посмотрим на эти уравнения в трехмерной формулировке. В обозначениях $\mu = (0, k)$, $\nu = (0, l)$ и т. д. 10 уравнений (2.62) переписутся в виде

$$\begin{aligned}\partial_0 \mathcal{F}_{0k} &= \partial_l \mathcal{F}_{lk} - g [\mathcal{A}_l, \mathcal{F}_{lk}], \\ \partial_0 \mathcal{A}_k &= \mathcal{F}_{k0}, \\ \mathcal{F}_{ik} &= \partial_k \mathcal{A}_i - \partial_i \mathcal{A}_k + g [\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k], \\ \mathcal{C}(x) &= \partial_k \mathcal{F}_{0k} - g [\mathcal{A}_k, \mathcal{F}_{0k}] = 0.\end{aligned}\tag{2.63}$$

Исключая переменные $\mathcal{F}_{ik}$ с помощью уравнений движения, видим, что система уравнений (2.63) имеет явно гамильтонов вид

$$\begin{aligned}\partial_0 E_k^a(x, t) &= - \frac{\delta H}{\delta A_k^a(x, t)} = \{H, E_k^a(x, t)\}, \\ \partial_0 A_k^a(x, t) &= \frac{\delta H}{\delta E_k^a(x, t)} = \{H, A_k^a(x, t)\}, \\ H &= \int h d^3x,\end{aligned}\tag{2.64}$$

где использованы введенные выше обозначения для E_k, h и скобки Пуассона. Последнее уравнение

$$\mathcal{C}(x, t) = 0\tag{2.65}$$

представляет собой уравнение связи. Как мы уже видели, скобка Пуассона $\{H, \mathcal{C}(x, t)\}$ исчезает,

$$\{H, \mathcal{C}(x, t)\} = \partial_0 \mathcal{C}(x, t) = 0,\tag{2.66}$$

так что $\mathcal{C}(x, t)$ порождает бесконечный набор интегралов движения.

Покажем, что $\mathcal{C}(x)$ являются генераторами инфинитезимальных калибровочных преобразований, оставшихся после наложения калибровочного условия $\mathcal{A}_0 = 0$. Для этого произвольной матрице $\alpha(x)$ в присоединен-

ном представлении группы $\Omega(x)$ сопоставим величину $C(\alpha)$

$$C(\alpha) = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \left\{ \int \mathcal{E}(x) \alpha(x) d^3x \right\}. \quad (2.67)$$

Перестановочные соотношения (2.7) в этих обозначениях переписываются в виде

$$\{C(\alpha), C(\beta)\} = gC([\alpha, \beta]). \quad (2.68)$$

Это показывает, что $C(\alpha)$ задает представление алгебры Ли группы калибровочных преобразований, состоящей из матриц $\alpha(x)$. Действие этого представления на переменные $\mathcal{A}_l(x)$ и $\mathcal{E}_l(x)$ дается формулой

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}_l &= \{C(\alpha), \mathcal{A}_l(x)\} = \partial_l \alpha(x) - g[\mathcal{A}_l(x), \alpha(x)], \\ \delta \mathcal{E}_k &= \{C(\alpha), \mathcal{E}_k(x)\} = -g[\mathcal{E}_k(x), \alpha(x)]. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Итак, действительно, $C(\alpha)$ являются генераторами калибровочных преобразований, оставшихся в гамильтоновой калибровке.

В соответствии с принципом относительности наблюдаемые величины $O(\mathcal{A}_k, \mathcal{E}_k)$ калибровочно-инвариантны и, следовательно, должны коммутировать с $C(\alpha)$. Это условие представляет собой систему дифференциальных уравнений первого порядка, для которой соотношение (2.68) играет роль условия интегрируемости, и выражает одну из шести функций $\mathcal{A}_k, \mathcal{E}_k$, от которых зависит O , через остальные. Вместе с условием связи (2.65) это сводит число независимых функций к четырем, что согласуется с подсчетом степеней свободы в кулоновской калибровке.

Посмотрим, как эта классическая картина переносится на квантовый случай. В операторной формулировке гамильтониан, связи C и наблюдаемые O становятся операторами, удовлетворяющими соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} [C(\alpha), C(\beta)] &= gC([\alpha, \beta]), \\ [H, C(\alpha)] &= 0; \quad [O, C(\alpha)] = 0. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Мы не можем положить прямо оператор C равным нулю, однако формулы (2.70) показывают, что существует подпространство, образованное векторами ψ ,

удовлетворяющими уравнению

$$C\psi = 0, \quad (2.71)$$

и что это подпространство инвариантно по отношению к операторам наблюдаемых величин. Условие (2.71) заменяет классическое уравнение $C = 0$, а построенное подпространство является истинным пространством состояний нашей физической системы.

Для описания динамики не обязательно работать в физическом подпространстве. Проще рассматривать оператор $\exp\{-iHt\}$ в полном пространстве и накладывать условие (2.71) только на состояния, между которыми вычисляются матричные элементы. В силу коммутативности H и C такая процедура законна. Чтобы перейти к S -матрице, заметим, что для асимптотических состояний условие (2.71) упрощается. Можно показать, что

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} e^{iH_0 t} C(\alpha) e^{-iH_0 t} = C_0(\alpha) + O(1), \quad (2.72)$$

где

$$C_0(\alpha) = -\frac{1}{2} \int \text{tr} \partial_k \mathcal{E}_k(\mathbf{x}, t) \alpha(\mathbf{x}) d^3x \quad (2.73)$$

— генератор линеаризованных калибровочных преобразований:

$$\delta \mathcal{E}_k = 0; \quad \delta \mathcal{A}_k = \partial_k \alpha(\mathbf{x}), \quad (2.74)$$

и H_0 — свободный оператор энергии,

$$H_0 = -\frac{1}{4} \text{tr} \int (\mathcal{E}_k^2 + (\partial_k \mathcal{A}_l - \partial_l \mathcal{A}_k)^2) d^3x. \quad (2.75)$$

Действительно, разность $C(\alpha)$ и $C_0(\alpha)$, имеющая вид

$$C_1(\alpha) = \text{tr} \int [\mathcal{E}_k, \mathcal{A}_k] \alpha d^3x \quad (2.76)$$

квадратична по полям $\mathcal{A}$ и $\mathcal{E}$ и поэтому коэффициентные функции оператора $\exp\{-iH_0 t\} C_1(\alpha) \exp\{iH_0 t\}$ убывают при $|t| \rightarrow \infty$. Оператор C_0 коммутирует с H_0 и S -матрицей. Это показывает следующая формальная

выкладка:

$$\begin{aligned}
 S\mathbf{C}_0 &= \lim_{\substack{t'' \rightarrow +\infty \\ t' \rightarrow -\infty}} e^{iH_0 t''} e^{-iH(t''-t')} e^{-iH_0 t'} \mathbf{C}_0 = \\
 &= \lim_{\substack{t'' \rightarrow +\infty \\ t' \rightarrow -\infty}} e^{iH_0 t''} e^{-iH(t''-t')}, \mathbf{C} e^{-iH_0 t'} = \\
 &= \lim_{\substack{t'' \rightarrow \infty \\ t' \rightarrow -\infty}} e^{iH_0 t''} \mathbf{C} e^{-iH(t''-t')} e^{-iH_0 t'} = \\
 &= \lim_{\substack{t'' \rightarrow \infty \\ t' \rightarrow -\infty}} \mathbf{C}_0 e^{iH_0 t''} e^{-iH(t''-t')} e^{-iH_0 t'} = \mathbf{C}_0 S. \quad (2.77)
 \end{aligned}$$

Векторы состояния $\psi(a_l^*)$, удовлетворяющие асимптотическому условию

$$\mathbf{C}_0 \psi = 0, \quad (2.78)$$

даются формулой

$$\psi(a^*) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int a^{*L}(\mathbf{k}) a^L(\mathbf{k}) d^3 k \right\} \tilde{\psi}(a^{*T}), \quad (2.79)$$

где a^L и a^T обозначают компоненты $a(\mathbf{k})$, параллельные и ортогональные вектору $\mathbf{k}$ соответственно. Как видно, векторы $\psi(a^*)$ фактически зависят лишь от двух поляризаций. По доказанному выше это подпространство является инвариантным для S -матрицы.

На языке континуального интеграла приведенные рассуждения переформулируются следующим образом. S -матрица в полном пространстве определяется континуальным интегралом

$$\begin{aligned}
 S &= \lim_{\substack{t'' \rightarrow \infty \\ t' \rightarrow -\infty}} \int \exp \left\{ \int d^3 k \frac{1}{2} [a_l^{*b}(\mathbf{k}, t'') a_l^b(\mathbf{k}, t'') + \right. \\
 &\quad \left. + a_l^{*b}(\mathbf{k}, t') a_l^b(\mathbf{k}, t')] + \right. \\
 &\quad \left. + i \int_{t''}^{t'} dt \int d^3 x \left(-\frac{1}{4} \right) \text{tr} [\mathcal{E}_l(\mathbf{x}, t) \dot{\mathcal{A}}_l(\mathbf{x}, t) - \dot{\mathcal{E}}_l(\mathbf{x}, t) \mathcal{A}_l(\mathbf{x}, t) - \right. \\
 &\quad \left. - \mathcal{E}_l^2(\mathbf{x}, t) - \mathcal{G}_l^2(\mathbf{x}, t)] \right\} \prod_{\mathbf{x}, t} d\mathcal{A}_l d\mathcal{E}_l. \quad (2.80)
 \end{aligned}$$

Выполняя интегрирование по $\mathcal{E}$, получаем

$$S = \int_{\substack{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \\ k \rightarrow k, \text{ in out}}} \exp \left\{ i \int dx \left[-\frac{\text{tr}}{4} (\dot{\mathcal{A}}_l^2 - \mathcal{G}_l^2) \right] \right\} \prod_{\mathbf{x}} d\mathcal{A}_k, \quad (2.81)$$

где, в отличие от аналогичной формулы в кулоновской калибровке, граничные условия накладываются на все три компоненты $\mathcal{A}_k$.

Действие, стоящее в экспоненте, можно привести к релятивистски-инвариантному виду, введя формально интегрирование по $\mathcal{A}_0$. Тогда получим

$$S = \int_{\substack{\mathcal{A}_k \rightarrow \mathcal{A}_k \\ \text{in, out}}} \exp \left\{ i \int dx \left[\frac{1}{8} \text{tr} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} \right] \right\} \prod_x \delta(\mathcal{A}_0) d\mathcal{A}_\mu. \quad (2.82)$$

Этот интеграл также допускает интерпретацию в духе принципа относительности. Он представляет собой интеграл по классам калибровочно-эквивалентных полей при другом калибровочном условии, определяющем выбор представителей. По сравнению с кулоновским случаем мера интегрирования выглядит проще и не содержит детерминанта.

Пропагатор для диаграммной техники имеет вид

$$D_{lm}^H = - \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ikx} \frac{1}{k_0^2} [\delta_{lm} + (k^2 \delta_{lm} - k_l k_m) (k^2 + i0)^{-1}] dk. \quad (2.83)$$

Для вычисления следует решить уравнения

$$\partial_\mu (\partial_\mu \mathcal{A}_k - \partial_k \mathcal{A}_\mu) + \mathcal{I}_k = 0, \quad \mathcal{A}_0 = 0, \quad (2.84)$$

которые при наших граничных условиях имеют решение

$$\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_k^{(0)} + \int D_{kl}^H (x - y) \mathcal{I}_l(y) dy. \quad (2.85)$$

Эта формула показывает, что так же, как и в кулоновском случае, распространяются во времени лишь трехмерно поперечные составляющие A_k^T .

§ 3. Ковариантные правила квантования и фейнмановская диаграммная техника

Как уже отмечалось, полученное в предыдущем параграфе выражение для S -матрицы не является явно ковариантным. Это неудобно для вычислений по теории возмущений, в особенности для проведения перенормировок. Метод континуального интеграла позволяет изба-

виться от этого недостатка. Принцип относительности подсказывает, что для этого нужно перейти к релятивистски-инвариантной параметризации классов калибровочно-эквивалентных полей, т. е. выбрать релятивистски-инвариантную калибровку. Простейшим релятивистски-инвариантным калибровочным условием является условие Лоренца

$$\partial_\mu \mathcal{A}_\mu = 0. \quad (3.1)$$

Покажем, как, исходя из уже известного выражения для S -матрицы в кулоновской калибровке (2.40), можно перейти к лоренцевой калибровке. С геометрической точки зрения мы должны перенести меру, заданную на поверхности $\Phi_C \equiv \partial_k \mathcal{A}_k = 0$, на поверхность $\Phi_L \equiv \partial_\mu \mathcal{A}_\mu = 0$ вдоль траекторий калибровочной группы. Формально это можно сделать, используя следующий прием. Введем функционал $\Delta_L(\mathcal{A})$, исходя из условия

$$\Delta_L(\mathcal{A}) \int \prod_x \delta(\partial_\mu \mathcal{A}_\mu^\omega) d\omega = 1, \quad (3.2)$$

где интегрирование ведется по мере $\prod_x d\omega(x)$, и $d\omega$ — инвариантная мера на группе Ω :

$$d(\omega\omega^0) = d(\omega^0\omega) = d\omega. \quad (3.3)$$

Функционал $\Delta_L(\mathcal{A})$, очевидно, калибровочно-инвариантен:

$$\Delta_L(\mathcal{A}^\omega) = \Delta_L(\mathcal{A}), \quad (3.4)$$

что непосредственно следует из инвариантности меры интегрирования.

Пользуясь соотношением (3.2), выражение для S -матрицы (2.46) можно переписать в виде

$$S = N^{-1} \int \exp \left\{ i \int dx \left[\frac{1}{8} \text{tr} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} \right] \right\} \prod_x \delta(\partial_k \mathcal{A}_k) \times \\ \times \prod_t \det M_C(\mathcal{A}) \Delta_L(\mathcal{A}) \prod_x \delta(\partial_\mu \mathcal{A}_\mu^\omega) d\omega d\mathcal{A}. \quad (3.5)$$

Заметим теперь, что функционал $\prod_t \det M_C(\mathcal{A})$ совпадает с калибровочно-инвариантным функционалом

$\Delta_C(\mathcal{A})$ на поверхности $\Phi_C \equiv \partial_k \mathcal{A}_k = 0$, где $\Delta_C(\mathcal{A})$ вводится аналогично $\Delta_L(\mathcal{A})$:

$$\Delta_C(\mathcal{A}) \int \delta(\partial_k \mathcal{A}_k^\omega) d\omega = 1. \quad (3.6)$$

Действительно, если $\mathcal{A}_k$ удовлетворяет условию $\partial_k \mathcal{A}_k = 0$, то $\omega = 1$ очевидно является корнем аргумента δ -функции (единственным в рамках теории возмущений). Поэтому в интеграле (3.6) достаточно интегрировать лишь в окрестности единичного элемента. Для $\omega(x) \approx 1 + u(x)$ имеем

$$\partial_k \mathcal{A}_k^\omega = \Delta u - g[\mathcal{A}_k(x), \partial_k u(x)] = M_C u(x) \quad (3.7)$$

и

$$\prod_x d\omega(x) = \prod_x du(x). \quad (3.8)$$

Таким образом, интеграл явно вычисляется, и мы получаем, что

$$\Delta_C(\mathcal{A})|_{\partial_k \mathcal{A}_k=0} = \prod_t \det M_C(\mathcal{A}). \quad (3.9)$$

Вернемся к нашему интегралу (3.5), в котором, как мы только что доказали, можно положить

$$\prod_x \delta(\partial_k \mathcal{A}_k) \prod_t \det M_C = \prod_x \delta(\partial_k \mathcal{A}_k) \Delta_C. \quad (3.10)$$

Сделаем теперь замену переменных

$$\mathcal{A}_\mu \rightarrow \mathcal{A}_\mu^{\omega^{-1}}, \quad (3.11)$$

якобиан которой очевидно равен единице.

В силу инвариантности действия и множителей Δ_L , Δ_C интеграл (3.5) перепишется в виде

$$S = N^{-1} \int \exp \left\{ i \int dx \left[\frac{1}{8} \text{tr} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} \right] \right\} \prod_x \delta(\partial_\mu \mathcal{A}_\mu) \Delta_L(\mathcal{A}) \times \\ \times \delta(\partial_k \mathcal{A}_k^{\omega^{-1}}) \Delta_C(\mathcal{A}) d\omega d\mathcal{A}. \quad (3.12)$$

Заменяя в интеграле по $d\omega$, $\mathcal{A}^{\omega^{-1}}$ на $\mathcal{A}^\omega$ и пользуясь

формулой (3.6), видим, что последние два сомножителя в подынтегральном выражении (3.12) можно опустить. В результате получаем выражение для S -матрицы в лоренцевой калибровке:

$$S = N^{-1} \int \exp \left\{ i \int dx \left[\frac{1}{8} \text{tr} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} \right] \prod_x \Delta_L(\mathcal{A}) \delta(\partial_\mu \mathcal{A}_\mu) d\mathcal{A} \right\}. \quad (3.13)$$

Рассуждения, полностью аналогичные тем, которые привели к формуле (3.9), показывают, что на поверхности $\Phi_L \equiv \partial_\mu \mathcal{A}_\mu(x) = 0$ функционал Δ_L равен

$$\Delta_L(\mathcal{A})|_{\partial_\mu \mathcal{A}_\mu=0} = \det M_L, \quad (3.14)$$

где оператор M_L определяется формулой

$$M_L \alpha(x) = \square \alpha - g \partial_\mu [\mathcal{A}_\mu, \alpha] = \square \alpha + W(\mathcal{A}) \alpha. \quad (3.15)$$

Заметим, что фигурирующие здесь определители $\det M_C$ и $\det M_L$ уже встречались нам в первой главе при формулировке допустимости калибровочного условия.

Мы пока не обсуждали влияние замены переменных на асимптотические условия в интеграле (2.40). В связи с этим полученная формула для S -матрицы (3.13) носит пока несколько формальный характер. В частности, из наших рассуждений не ясно, в каком смысле следует понимать детерминант M_L . Дело в том, что для корректного задания оператора M_L во всем пространстве переменных x нужны граничные условия при $t \rightarrow \pm \infty$. По другому тот же вопрос можно сформулировать следующим образом. Для определения детерминанта естественно воспользоваться формулой

$$\det M_L = \exp \{ \text{Tr} \ln M_L \} = \exp \{ \text{Tr} \ln \square + \text{Tr} \ln (1 + \square^{-1} W(\mathcal{A})) \}. \quad (3.16)$$

Здесь символом Tr обозначена операция взятия следа, включающая также интегрирование по координатам.

Первый множитель представляет собой несущественную константу, которая меняет лишь нормировочный

множитель N . Второй же множитель порождает добавку к действию, которая имеет вид

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln (1 + \square^{-1} W(\mathcal{A})) &= \sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{Tr} (\square^{-1} W)^n = \\ &= -\frac{g^2}{2} \int dx_1 dx_2 \text{tr} \{ \mathcal{A}_{\mu_1}(x_1) \mathcal{A}_{\mu_2}(x_2) \} \partial_{\mu_1} D(x_1 - x_2) \times \\ &\times \partial_{\mu_2} D(x_2 - x_1) - \dots + (-1)^{n+1} \frac{g^n}{n} \int dx_1 \dots dx_n \times \\ &\times \text{tr} \{ \mathcal{A}_{\mu_1}(x_1) \dots \mathcal{A}_{\mu_n}(x_n) \} \times \\ &\times \partial_{\mu_1} D(x_1 - x_2) \dots \partial_{\mu_n} D(x_n - x_1) - \dots, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $D(x)$ — функция Грина оператора д'Аламбера. Эта функция Грина определена неоднозначно, и вопрос состоит в том, какие граничные условия надо наложить для ее однозначного определения. Практически речь идет о способе обхода полюса в интеграле

$$D = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ikx}}{k^2} dk, \quad (3.18)$$

определяющем функцию Грина. Аналогичная проблема возникает и при определении функции Грина $D_{\mu\nu}^L(x-y)$, отвечающей квадратичной форме в лоренцевой калибровке. Формальный ответ, полученный обращением этой квадратичной формы, имеет вид

$$D_{\mu\nu}^L(x-y) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ik(x-y)} \left\{ g^{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right\} \frac{1}{k^2} dk. \quad (3.19)$$

В этой формуле также необходимо выяснить, в каком смысле обходятся полюса подынтегрального выражения.

Для ответа на вопрос о граничных условиях нужно провести преобразование интеграла (2.46) к интегралу (3.13) до перехода к пределу по времени $t'' \rightarrow \infty$, $t' \rightarrow -\infty$. Напомним, что в кулоновской калибровке, помимо граничных условий на трехмерно поперечные составляющие потенциала $\mathcal{A}_k^T$, у нас есть условие

$$\partial_k \mathcal{A}_k = 0, \quad (3.20)$$

которое выполняется во всем интервале $t' \leq t \leq t''$, в том числе и при $t = t''$, $t = t'$. Замена переменных

$$\mathcal{A}_\mu \rightarrow \mathcal{A}_\mu^{\omega^{-1}} = \omega^{-1} \mathcal{A}_\mu \omega + \partial_\mu \omega^{-1} \omega \quad (3.21)$$

не должна нарушать этого условия.

Отсюда следует ограничение на ω :

$$\omega(\mathbf{x}, t'') = 1, \quad \omega(\mathbf{x}, t') = 1, \quad (3.22)$$

обеспечивающее исчезновение пространственных производных $\partial_k \omega$. Заметим, что производная по времени $\partial_0 \omega$ при этом не обязательно должна исчезать при $t = t'$ и $t = t''$, так как в интеграле (2.46) никаких условий на $\mathcal{A}_0$ при $t = t'$ и $t = t''$ не накладывается. Такое преобразование не меняет также и граничных значений поперечных составляющих $\mathcal{A}_k^T$ при $t' \rightarrow -\infty$, $t'' \rightarrow +\infty$, так как в этом пределе преобразование (3.21) линеаризуется и сводится к замене

$$\mathcal{A}_\mu \rightarrow \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \alpha, \quad (3.23)$$

где

$$\omega = \exp \{ \alpha \}. \quad (3.24)$$

Таким образом, формальное определение оператора M_L , данное формулой (3.15), следует дополнить граничными условиями

$$\alpha(\mathbf{x}, t'') = \alpha(\mathbf{x}, t') = 0. \quad (3.25)$$

Функция Грина D , возникающая при разложении детерминанта в ряд теории возмущений, является функцией Грина оператора д'Аламбера с этими же граничными условиями. Такая функция имеет вид

$$D_1(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ik(x-y)} \frac{\sin[|\mathbf{k}|(x_0 - t')] \cdot \sin[|\mathbf{k}|(y_0 - t'')]}{|\mathbf{k}| \sin[|\mathbf{k}|(t'' - t)]} d^3k, \quad (3.26)$$

$$x_0 \leq y_0;$$

при $x_0 \geq y_0$ $D_1(x, y)$ определяется из условия симметрии

$$D_1(x, y) = D_1(y, x).$$

При таком определении оператора M_L его детерминант положителен в рамках теории возмущений, что и

оправдывает его использование в формуле (3.14) вместо $|\det M_L|$.

Аналогично решается и вопрос об обходе полюсов в функции Грина $D_{\mu\nu}^L$. Для ее определения при конечных t' , t'' мы должны решить уравнения

$$\square \mathcal{A}_\mu = \mathcal{J}_\mu, \quad \partial_\mu \mathcal{A}_\mu = 0, \quad (3.27)$$

где $\mathcal{J}_\mu$ удовлетворяет условию совместности

$$\partial_\mu \mathcal{J}_\mu = 0. \quad (3.28)$$

Граничные условия для этой системы таковы:

$$a_i^*(\mathbf{k}, t'') = a_i^*(\mathbf{k}) e^{i\omega t''}, \quad a_i(\mathbf{k}, t') = a_i(\mathbf{k}) e^{-i\omega t'} \quad (3.29)$$

$$(i = 1, 2),$$

$$\partial_k \mathcal{A}_k(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{при} \quad t = t'; \quad t = t''.$$

Граничные условия для $\mathcal{A}_0$ определяются из самой системы (3.27) и имеют вид

$$\partial_0 \mathcal{A}_0 = 0, \quad t = t', \quad t = t''. \quad (3.30)$$

Решение системы (3.27) имеет вид

$$\mathcal{A}_l^T(x) = \mathcal{A}_l^{T_0}(x) + \int \tilde{D}(x, y) \mathcal{J}_l^T(y) dy, \quad (3.31)$$

где

$$\mathcal{A}_l^{bT_0}(x) = \sum_{i=1,2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - i\omega t} a_i^b(\mathbf{k}) u_l^i(\mathbf{k}) +$$

$$+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x} + i\omega t} a_i^{b*}(\mathbf{k}) u_l^i(-\mathbf{k}) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}}, \quad (3.32)$$

и векторы $u_l^i(\mathbf{k})$ введены выше в (2.43). Функция Грина $\tilde{D}(x, y)$ имеет вид

$$\tilde{D}(x, y) = D_c(x - y) \theta(t'' - y_0) \theta(y_0 - t'), \quad (3.33)$$

и при $t' \rightarrow -\infty$, $t'' \rightarrow +\infty$, переходит в причинную функцию Грина $D_c(x - y)$. Остающиеся компоненты $\mathcal{A}_l^L(x)$ и $\mathcal{A}_0(x)$ даются формулами

$$\mathcal{A}_0(x) = \int D_2(x, y) \mathcal{J}_0(y) dy; \quad \mathcal{A}_l^L = \int D_2(x, y) \mathcal{J}_l^L(y) dy, \quad (3.34)$$

где $D_2(x, y)$ — функция Грина оператора д'Аламбера с граничными условиями

$$\partial_0 \alpha|_{t=t''} = \partial_0 \alpha|_{t=t'} = 0. \quad (3.35)$$

Эта функция имеет вид

$$D_2(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ik(x-y)} \frac{\cos[|k|(x_0 - t')] \cos[|k|(y_0 - t'')]}{|k| \sin[|k|(t'' - t')]} d^3k. \quad (3.36)$$

$$x^0 \leq y^0.$$

При $x_0 \geq y_0$, $D_2(x, y)$ определяется из условия симметрии. Объединяя формулы (3.33), (3.36), (3.26), получаем функцию Грина в лоренцевой калибровке для конечного интервала времени, согласованную с кулоновскими граничными условиями.

Попробуем теперь перейти в полученных выражениях к пределу при $t'' \rightarrow \infty$, $t' \rightarrow -\infty$. Предел функции $\tilde{D}(x, y)$ существует и совпадает с причинной функцией Грина $D_c(x - y)$. Это согласуется с тем, что трехмерно поперечные составляющие $A_i^T(x)$ отвечают физическим поляризациям.

Функции $D_1(x, y)$ и $D_2(x, y)$ не имеют предела при $t'' \rightarrow +\infty$, $t' \rightarrow -\infty$. В то же время предел интеграла (3.13), определяющего S -матрицу в лоренцевой калибровке, должен существовать, поскольку по построению этот интеграл равен кулоновскому интегралу (2.40), для которого предел существует. Это значит, что при разложении S -матрицы (3.13) в ряд теории возмущений суммарный вклад функций D_1 и D_2 стремится к определенному пределу. Формально этот предел проще всего вычислить, регуляризуя одинаковым образом функции D_1 и D_2 , например, добавлением бесконечно малой мнимой части к переменной интегрирования k^2 . В результате такой регуляризации осциллирующие экспоненты в подынтегральных выражениях для D_1 и D_2 станут либо растущими, либо убывающими при больших $|t'|$, $|t''|$ и предел будет существовать. Наиболее удобно считать, что k^2 имеет отрицательную мнимую добавку $-i0$, так как в этом случае пределы функций D_1 и D_2 совпадают с причинной функцией $D_c(x)$, и для полной функции Грина

в лоренцевой калибровке мы получаем явно ковариантное выражение

$$D_{\mu\nu}^L(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \left(g^{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + i0} \right) \frac{1}{k^2 + i0} e^{-ikx} dk. \quad (3.37)$$

Одновременно функции Грина, фигурирующие в разложении определителя $\det M_L$ в ряд теории возмущений, также становятся причинными, а сам определитель становится комплексным функционалом от $\mathcal{A}_\mu$.

Подчеркнем еще раз, что конкретная регуляризация, использованная здесь, не является единственно возможной. Например, при замене $k^2 \rightarrow k^2 + i0$, мы получили бы антихронологические функции Грина для нефизических поляризаций, и мнимая часть определителя поменяла бы знак. При этом, однако, функция Грина $D_{\mu\nu}^L$ потеряла бы явную ковариантность.

Приведенные довольно длинные рассуждения привели нас к следующему ответу на поставленный выше вопрос: все обходы полюсов функций Грина можно считать фейнмановскими, т. е. считать, что $1/k^2$ интерпретируется, как $(k^2 + i0)^{-1}$. Таким образом S -матрица в лоренцевой калибровке имеет вид

$$S = N^{-1} \int_{\substack{\mathcal{A}_\mu \rightarrow \mathcal{A}_{\mu_{\text{out}}}^{\text{in}}, \\ t \rightarrow \mp\infty}} \exp \left\{ i \int \frac{1}{8} \text{tr} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} dx \right\} \times \\ \times \prod_x \Delta_L(\mathcal{A}) \delta(\partial_\mu \mathcal{A}_\mu) d\mathcal{A}, \quad (3.38)$$

где $\mathcal{A}_{\mu_{\text{out}}}^{\text{in}}$ — решение уравнений

$$\square \mathcal{A}_\mu = 0, \quad \partial_\mu \mathcal{A}_\mu = 0, \quad (3.39)$$

параметризованные амплитудами $a_\mu(k)$ и $a_\mu^*(k)$ такими, что

$$a_0 = 0, \quad k_l a_l = 0; \quad a_0^* = 0, \quad k_l a_l^* = 0, \quad (3.40)$$

причем в $\mathcal{A}_{\text{in}}$ задана амплитуда $a_l(k)$ (сходящаяся волна), а в $\mathcal{A}_{\text{out}}$ — $a_l^*(k)$ (расходящаяся волна).

Аналогичный вывод формулы (3.13) для S -матрицы можно было бы дать, отправляясь от гамильтоновой ка-

либровки $\mathcal{A}_0 = 0$. Единственное отличие состоит в том, что, во-первых, интеграл $\int \delta(\mathcal{A}_0^\omega) d\omega$ на поверхности $\mathcal{A}_0 = 0$ не зависит от $\mathcal{A}_\mu$, так что $\Delta_H = 1$ и, во-вторых, при замене $\mathcal{A}_\mu \rightarrow \mathcal{A}_\mu^\omega$ следует использовать условие

$$\partial_0 \omega(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad t = t' \quad \text{и} \quad t = t'', \quad (3.41)$$

так что полная функция распространения $D_{\mu\nu}^L$ строится при помощи функции Грина D_2 . Окончательный результат для S -матрицы очевидно совпадает с полученным выше.

Полученная формула (3.38) не является единственно возможным релятивистски-инвариантным выражением для S -матрицы. Интегрирование по калибровочно-эквивалентным классам можно реализовать не только путем выбора представителя в каждом классе при помощи условия калибровки. Анализ нашего перехода от кулоновской калибровки к лоренцевой показывает, что в формуле (3.2) не обязательно использовать в качестве подынтегрального выражения функционал типа δ -функции. Вместо нее можно взять любой не калибровочно-инвариантный функционал $B(\mathcal{A})$, для которых сходится интеграл

$$\Delta_B^{-1}(\mathcal{A}) = \int [B(\mathcal{A}_\mu^\omega)] \prod_x d\omega. \quad (3.42)$$

В результате возникнет континуальный интеграл для S -матрицы, в котором $\delta(\partial_\mu \mathcal{A}_\mu) \det M_L(\mathcal{A})$ заменится на $\Delta_B(\mathcal{A}_\mu) B(\mathcal{A}_\mu)$. Выбирая в качестве $B(\mathcal{A})$ функционал

$$\exp \left\{ -\frac{i}{4\alpha} \int \text{tr} (\partial_\mu \mathcal{A}_\mu)^2 dx \right\}, \quad (3.43)$$

мы получим семейство свободных функций Грина $D_{\mu\nu}^\alpha$

$$D_{\mu\nu}^\alpha(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ikx} \left\{ g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu (1-\alpha)}{k^2 + i0} \right\} \frac{1}{k^2 + i0}, \quad (3.44)$$

которое содержит наиболее употребительные частные случаи: при $\alpha = 0$ мы возвращаемся к лоренцевой калибровке, а при $\alpha = 1$ получаем диагональную функцию Грина.

Приведем формальные рассуждения, наиболее просто реализующие эту программу. Перейдем сначала от лоренцевой калибровки к обобщенной лоренцевой калибровке

$$\partial_\mu \mathcal{A}_\mu(x) = a(x), \quad (3.45)$$

где $a(x)$ — произвольная матричная функция, используя те же рассуждения, что и при переходе от кулоновской калибровки к лоренцевой. Соответствующий функционал $\Delta_a(\mathcal{A})$, определяемый формулой

$$[\Delta_a(\mathcal{A})]^{-1} = \int \prod_x \delta[\partial_\mu \mathcal{A}_\mu^\omega - a(x)] d\omega, \quad (3.46)$$

на поверхности

$$\partial_\mu \mathcal{A}_\mu = a(x) \quad (3.47)$$

совпадает с функционалом $\det M$, где оператор M вводится формулой (3.15). Таким образом, производящий функционал (3.38) для S -матрицы тождественно переписывается в виде

$$S = N^{-1} \int_{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_{\text{in}}^{\text{out}}} \exp \left\{ i \int \frac{\text{tr}}{8} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} dx \right\} \times \\ \times \prod_x \delta(\partial_\mu \mathcal{A}_\mu - a(x)) \det M d\mathcal{A}. \quad (3.48)$$

Поскольку исходный функционал не зависит от a , мы можем его проинтегрировать по $a(x)$ с весом

$$\exp \left\{ -i \frac{\text{tr}}{4\alpha} \int a^2(x) dx \right\}, \quad (3.49)$$

что приведет лишь к изменению нормировочного множителя N . Выполняя интегрирование, получаем производящий функционал для S -матрицы в виде

$$S = N^{-1} \int_{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_{\text{in}}^{\text{out}}} \exp \left\{ i \int \text{tr} \left[\frac{1}{8} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{4\alpha} (\partial_\mu \mathcal{A}_\mu)^2 \right] dx \right\} \times \\ \times \prod_x \det M d\mathcal{A}. \quad (3.50)$$

Расширяя понятия калибровочного условия, будем называть этот функционал S -матрицей в α -калибровке.

Разложение этого функционала в ряд теории возмущений порождает диаграммную технику с функциями Грина (3.44). Чтобы сделать эти рассуждения вполне строгими, необходимо, как и выше, более внимательно следить за граничными условиями. Мы не будем здесь этого делать и ограничимся лишь указанием, что все функции Грина можно выбирать причинными. Более подробно эквивалентность S -матриц в различных калибровках будет обсуждаться в следующей главе в связи с проблемой перенормировки.

Можно ввести калибровки еще более общего вида, для которых продольная часть функции Грина поля Янга — Миллса является произвольной функцией k^2 . Для этого достаточно использовать в качестве функционала $B(A)$ выражение типа $\exp \left\{ -\frac{i}{4\alpha} \text{tr} [f(\square) \partial_\mu A_\mu]^2 dx \right\}$, где $f(\square)$ — произвольная функция от оператора Д'Аламбера. Все рассуждения, проведенные выше для случая $f \equiv 1$, без каких-либо изменений переносятся и на этот случай. Калибровки такого типа будут использоваться в дальнейшем при обсуждении регуляризации и перенормировки.

Выражение (3.50) для S -матрицы содержит нелокальный функционал $\det M$ и потому не имеет привычного вида интеграла от фейнмановского функционала $\exp \{i \times \text{действие}\}$ по всем полям. Мы можем, однако, использовать для $\det M$ интегральное представление

$$\det M = \int \exp \left\{ i \int \bar{c}^a(x) M^{ab} c^b(x) dx \right\} \prod_x d\bar{c} dc, \quad (3.51)$$

где $\bar{c}(x)$ и $c(x)$ — антикоммутирующие скалярные функции (образующие алгебры Грассмана). Граничные условия для $\bar{c}$, c , приводящие к уже сделанному нами выбору M , имеют фейнмановский вид

$$\begin{aligned} d_{\text{out}}^{a*}(k) &= 0, & g_{\text{out}}^{a*}(k) &= 0, \\ d_{\text{in}}^a(k) &= 0, & g_{\text{in}}^a(k) &= 0, \end{aligned} \quad (3.52)$$

где d, g, d^*, g^* вводятся обычными формулами:

$$\begin{aligned} c^a(x, t)_{\text{in}}^{\text{out}} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left[e^{ikx - i\omega t} d_{\text{out}}^a(k) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-ikx + i\omega t} g_{\text{out}}^{a*}(k) \right] \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega}}, \\ \bar{c}^a(x, t)_{\text{in}}^{\text{out}} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left[e^{ikx - i\omega t} g_{\text{out}}^a(k) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-ikx + i\omega t} d_{\text{out}}^{a*}(k) \right] \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega}}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Используя это представление, перепишем формулу (3.50) для S в виде

$$\begin{aligned} S = N^{-1} \int \exp \left\{ i \int \text{tr} \left[\frac{1}{8} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{4\alpha} (\partial_\mu \mathcal{A}_\mu)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \bar{c} (\square c - g \partial_\mu [\mathcal{A}_\mu, c]) \right] dx \right\} \prod_x d\mathcal{A} d\bar{c} dc, \end{aligned} \quad (3.54)$$

где при $t \rightarrow \pm \infty$

$$\mathcal{A}_\mu \rightarrow \mathcal{A}_{\mu \text{out}}^{\text{in}}, \quad c \rightarrow c_{\text{out}}^{\text{in}}, \quad \bar{c} \rightarrow \bar{c}_{\text{out}}^{\text{in}}, \quad c = c^a t^a. \quad (3.55)$$

Ценой введения фиктивных полей $\bar{c}$, с нам удалось учесть принцип относительности так, что S -матрица, представляется в виде интеграла от $\exp \{i \times \text{действие}\}$, где действие локально и имеет невырожденную квадратичную форму, а интегрирование ведется по всем полям. Это позволяет развить для функционала (3.54) теорию возмущений так же, как это было сделано в предыдущей главе для случая скалярного поля, отправляясь от гауссова интеграла.

С этой целью введем производящий функционал для функций Грина

$$\begin{aligned} Z(J_\mu, \bar{\xi}, \xi) &= N^{-1} \int \exp \left\{ i \int \mathcal{L}_a(x) + \right. \\ &\quad \left. + [J_\mu^a A_\mu^a + \bar{\xi}^a c^a + \bar{c}^a \xi^a] dx \right\} \prod_x d\mathcal{A} d\bar{c} dc = \\ &= \exp \left\{ iV \left\{ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\xi}}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \xi} \right\} \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int [J_\mu^a(x) D_{\mu\nu}^{aab}(x-y) J_\nu^b(y) + \right. \\ &\quad \left. + 2\bar{\xi}^a(x) D^{ab}(x-y) \xi(y)] dx dy \right\}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

где J_μ^a , $\bar{\xi}^a$, ξ^a — источники полей A_μ^a , c^a , $\bar{c}^a$, причем ξ^a и $\bar{\xi}^b$ антикоммутируют между собой и с полями $\bar{c}^a$, c^b и

$$V(\mathcal{A}_\mu, \bar{c}, c) = \frac{1}{8} \text{tr} \int \{2g(\partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu)[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] + \\ + g^2([\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu])^2 + g\bar{c}\partial_\mu[\mathcal{A}_\mu, c]\} dx; \quad (3.57)$$

производные по $\bar{\xi}$ считаются левыми, а по ξ правыми. В интеграле (3.56) все переменные интегрирования удовлетворяют фейнмановским граничным условиям. Разложение функционала Z в ряд теории возмущений порождает диаграммную технику. Перечислим ее элементы, используя сразу импульсное представление.

1. Пропагатор векторных частиц

$$\rho \overset{\mu, a}{\underbrace{\hspace{1cm}}} \overset{\nu, b}{\underbrace{\hspace{1cm}}} = \\ = D_{\mu\nu}^{ab}(p) = -\frac{\delta^{ab}}{p^2 + i0} \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 + i0} (1 - \alpha) \right). \quad (3.58)$$

2. Вершины самодействия векторных частиц

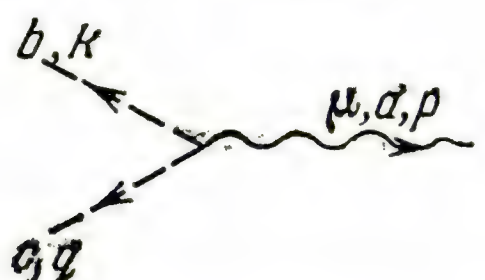
$$\begin{array}{c} \text{Diagram: A vertex with three external wavy lines. The left line is labeled } \rho, \mu, a \text{ with an arrow pointing towards the vertex. The top-right line is labeled } k, \nu, b \text{ with an arrow pointing away from the vertex. The bottom-right line is labeled } q, \rho, c \text{ with an arrow pointing away from the vertex.} \end{array} = V_{A^3} = \\ = -igt_{abc}[(p-k)_\rho g_{\mu\nu} + (k-q)_\mu g_{\nu\rho} + (q-p)_\nu g_{\mu\rho}], \quad (3.59)$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram: A vertex with four external wavy lines. The top-left line is labeled } b, \nu \text{ with an arrow pointing away from the vertex. The top-right line is labeled } c, \rho \text{ with an arrow pointing away from the vertex. The bottom-left line is labeled } a, \mu \text{ with an arrow pointing towards the vertex. The bottom-right line is labeled } d, \sigma \text{ with an arrow pointing away from the vertex.} \end{array} = V_{A^4} = g^2 \{t_{abe}t_{cde}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) + \\ + t_{ace}t_{bde}(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu}) + t_{ade}t_{cbe}(g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu} - g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho})\}. \quad (3.60)$$

3. Пропагатор фиктивных с-частиц

$$\text{---} \overset{a}{\text{---}} \text{---} \overset{b}{\text{---}} = D^{ab} = - \frac{\delta^{ab}}{p^2 + i0}. \quad (3.61)$$

4. Вершина взаимодействия фиктивных с-частиц с полем Янга — Миллса



$$= V_{c c A} = -\frac{ig}{2} t_{abc} (k - q)_\mu. \quad (3.62)$$

Каждая диаграмма, построенная через эти элементы, определяет вклад в функции Грина $G_{n,m}(k_1, \dots, k_n | p_1, \dots, p_m)$ с n внешними концами для векторных частиц и m концами фиктивных с-частиц. Вклад данной диаграммы входит с множителем

$$\frac{1}{r} \left(\frac{i}{(2\pi)^4} \right)^{l-V-1} (-1)^s, \quad (3.63)$$

где V — число вершин, l — число внутренних линий, r — порядок группы симметрии диаграммы и s — число замкнутых петель из фиктивных частиц.

S-матрица вычисляется по функциям Грина при помощи формул приведения:

$$\begin{aligned} S_{i_1 \dots i_n, j_1 \dots j_m}(k'_1 \dots k'_n, k_1 \dots k_m) = & \\ & = k_1'^2 \dots k_n'^2 k_1^2 \dots k_m^2 \theta(k'_{10}) \dots \theta(k'_{n0}) \times \\ & \times \theta(-k_{10}) \dots \theta(-k_{m0}) u_{\mu_1}^{i_1} \dots u_{\mu_n}^{i_n} \times \\ & \times G_{\mu_1 \dots \mu_n \nu_1 \dots \nu_m}(k'_1 \dots k'_n, k_1 \dots k_m) u_{\nu_1}^{j_1} \dots u_{\nu_m}^{j_m} \Big|_{\substack{k_i^2=0 \\ k_j^2=0}}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

В этой громоздкой формуле мы умножили каждую внешнюю векторную линию с импульсом k на k^2 и вектор поляризации $u_\mu^i = (0, u_i^i)$, $i = 1, 2$, а затем перешли на массовую поверхность $k^2 = 0$, считая, что $k_{i0} > 0$ для

каждой входящей частицы и $k_{i0} < 0$ для каждой выходящей частицы. Фиктивные частицы не имеют соответствующих внешних линий и входят в S -матрицу только через замкнутые петли.

§ 4. Взаимодействие с полями материи

Включение полей материи $\psi(x)$ во взаимодействие с полем Янга — Миллса $\mathcal{A}_\mu(x)$ не вносит новых трудностей в проблему квантования. Калибровочная группа действует на поле $\mathcal{A}_\mu(x)$ при помощи тех же формул, что и без полей материи. Поэтому калибровочное условие, наложенное только на поле $\mathcal{A}_\mu(x)$, фиксирует выбор представителей в классах калибровочно-эквивалентных полей $\mathcal{A}_\mu(x)$, $\psi(x)$. Это показывает, что в определении S -матрицы для этих полей в соответствующем континуальном интеграле можно интегрировать по полям ψ по уже вычисленной ранее мере (например, $\prod_x d\varphi(x)$ — для скалярного поля, $\prod_x d\bar{\psi}(x) d\psi(x)$ — для спинорного поля), а в качестве меры для полей $\mathcal{A}_\mu$ взять одну из мер, вычисленных в предыдущем параграфе, для поля Янга — Миллса в пустоте. Строгий вывод должен быть основан на гамильтоновой формулировке динамики и повторяет уже не один раз проведенные рассуждения.

В то же время калибровочное условие можно наложить и на поле материи ψ . Это бывает удобно, в частности, при квантовании моделей со спонтанно нарушенной симметрией. Один пример такого условия будет рассмотрен ниже.

Начнем с примера взаимодействующих полей Янга — Миллса и спинорного поля. Лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8g^2} \text{tr} \{ \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} \} + i\bar{\psi} \gamma_\mu \nabla_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi \quad (4.1)$$

инвариантен относительно калибровочного преобразования

$$\psi(x) \rightarrow \Gamma(\omega) \psi(x); \quad \mathcal{A}_\mu \rightarrow \mathcal{A}_\mu^\omega = \omega \mathcal{A}_\mu \omega^{-1} + \partial_\mu \omega \omega^{-1}. \quad (4.2)$$

Гамильтоново калибровочное условие

$$\mathcal{A}_0 = 0 \quad (4.3)$$

является допустимым и приводит уравнения движения к обобщенной гамильтоновой формулировке (с естественной модификацией, принимающей во внимание антикоммутативность полей $\bar{\psi}, \psi$)

$$\begin{aligned} \partial_0 \mathcal{A}_k &= \frac{\delta h}{\delta \mathcal{F}_{k0}} = \{h, \mathcal{A}_k\}, & \partial_0 \mathcal{F}_{k0} &= -\frac{\delta h}{\delta \mathcal{A}_k} = \{h, \mathcal{F}_{k0}\}, \\ \partial_0 \psi &= -i \frac{\delta h}{\delta \psi^*} = \{h, \psi\}, & \partial_0 \psi^* &= i \frac{\delta h}{\delta \psi} = \{h, \psi^*\}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $\psi^* = \bar{\psi} \gamma_0$

$$h = \int \left[i \bar{\psi} \gamma_k (\partial_k - \mathcal{A}_k) \psi + m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{g^2} \text{tr} (\mathcal{F}_{0k}^2 + \mathcal{F}_{ik}^2) \right] d^3x. \quad (4.5)$$

Кроме того, среди уравнений движения содержатся связи

$$C^a(x) = \partial_k F_{k0}^a - t^{abc} A_k^b F_{0k}^c + i \bar{\psi} \gamma_0 \Gamma(T^a) \psi, \quad (4.6)$$

отличающиеся от (2.63) последним слагаемым, которое строится через поля материи. Заметим, что это слагаемое представляет собой 0-компоненту тока

$$J_\mu^a = \bar{\psi} \gamma_\mu \Gamma(T^a) \psi, \quad (4.7)$$

который сохраняется при выключенном взаимодействии. Соотношения

$$\begin{aligned} \{C^a(x), C^b(y)\} &= t^{abc} \delta(x-y) C^c(x), \\ \{h, C^a\} &= 0; \\ \{C^a(x), A_k^b(y)\} &= \delta^{ab} \partial_k \delta(x-y) - t^{acb} A_k^c \delta(x-y), \\ \{C^a(x), \psi(y)\} &= \Gamma(T^a) \psi(x) \delta(x-y); \\ \{C^a(x), \bar{\psi}(y)\} &= -\Gamma(T^a) \bar{\psi}(x) \delta(x-y), \end{aligned} \quad (4.8)$$

аналогичные (2.66), (2.68) и (2.69), показывают, что $C^a(x)$ является генератором калибровочных преобразований, которые остались после наложения калибровочного условия $\mathcal{A}_0 = 0$. Параметры α^a этого преобразования не зависят от x_0 .

Поля материи входят в $C^a(x)$ квадратично, так что на решениях свободных уравнений движения связь линейризуется при $t \rightarrow \infty$,

$$C^a(x) \underset{|t| \rightarrow \infty}{\sim} C_0^a(x), \quad (4.9)$$

где

$$C_0^a = \partial_k F_{k0}^a. \quad (4.10)$$

В результате, повторяя рассуждения из § 2, мы приходим к выводу, что в квантовом случае S -матрица, построенная по гамильтониану H в большом пространстве, где действуют все поля A_k^a , E_k^a , $\bar{\psi}^a$, ψ^a , коммутирует с оператором $C_0^a(x)$:

$$[S, C_0^a(x)] = 0. \quad (4.11)$$

Другими словами, и при наличии полей материи рассеиваются только кванты этих полей и трехмерно поперечные кванты полей Янга—Миллса.

Подчеркнем, что эти выводы, так же, как и выше, основаны на линеаризации связи $C^a(x)$ при больших временах. В рамках теории возмущений такая линеаризация выглядит вполне убедительно и мы исходим из того, что она имеет место. В то же время мы не можем исключить, что вне рамок теории возмущений линеаризации нет. Модели заключения кварков могут быть основаны именно на таком обстоятельстве.

Возвращаясь к нашей S -матрице, запишем ее в виде континуального интеграла

$$S = \int_{\substack{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_{\text{in}} \\ \text{out} \\ \psi \rightarrow \psi_{\text{in}} \\ \text{out}}} \exp \left\{ i \int \mathcal{L}(x) dx \right\} \prod_x \delta(\mathcal{A}_0) d\mathcal{A} d\bar{\psi} d\psi \quad (4.12)$$

и проведем с этим интегралом преобразования, уже описанные в § 3:

1. Интегрирование по $\mathcal{F}_{k0}$;
2. Переход к обобщенной лоренцевой калибровке

$$\Phi_L = \partial_\mu \mathcal{A}_\mu(x) + a(x) = 0$$

при помощи формулы

$$\delta(\mathcal{A}_0) d\mathcal{A}_\mu \rightarrow \Delta_L(\mathcal{A}) \delta(\partial_\mu \mathcal{A}_\mu + a) d\mathcal{A}_\mu. \quad (4.13)$$

3. Интегрирование по вспомогательной функции $a(x)$ с гауссовым весом $\exp \left\{ -\frac{i}{4\alpha} \text{tr} \int a^2(x) dx \right\}$.

Мы получим выражения как для S -матрицы, так и для производящего функционала функций Грина в α -калибровке, которые отличаются от формул (3.54), (3.56) только присутствием полей $\bar{\psi}$, ψ в лагранжиане и в членах с источниками.

Диаграммная техника содержит помимо уже введенных выше элементов $G_{\mu\nu}$, G , V_{A^3} , V_{A^4} , $V_{c\bar{c}A}$, еще спинорную линию

$$\rho \text{ --- } = S = \frac{m + p_\mu \gamma_\mu}{m^2 - p^2 - i0} \quad (4.14)$$

и вершину

$$\text{---} \text{---} \text{---} = V_{\bar{\psi}\psi A} = g \gamma_\mu T(t_a). \quad (4.15)$$

Вследствие уже отмечавшихся особенностей интегрирования по ферми полям, каждый фермионный цикл вносит дополнительный множитель (-1) . В формулах приведения спинорные концы умножаются на $(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \bar{u}_i (\gamma_\mu k_\mu - m) \theta(-k_0)$ для выходящей частицы и на $(2\pi)^{-\frac{3}{2}} (\gamma_\mu k_\mu - m) u_i \theta(k_0)$ для входящей частицы. Для античастиц нужно заменить u_i на v_i и $\theta(k_0)$ на $\theta(-k_0)$.

Второй пример, который мы рассмотрим, это модель со спонтанно нарушенной симметрией. Выберем в качестве калибровочной группы группу $SU(2)$ и пусть φ — скалярное поле в изоспинорном представлении:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi^+ = (\varphi_1^*, \varphi_2^*). \quad (4.16)$$

Лагранжиан модели (I.3.25) перепишем в формализме первого порядка

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM}(A_\mu, F_{\mu\nu}) + \varphi_\mu^+ \nabla_\mu \varphi + (\nabla_\mu \varphi)^+ \varphi_\mu - \varphi_\mu^+ \varphi_\mu - \lambda (\varphi^+ \varphi - \mu^2)^2, \quad (4.17)$$

где мы ввели вспомогательные векторные поля φ_μ , φ_μ^+ , и

$$\nabla_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + \frac{ig}{2} A_\mu^a \tau^a \varphi, \quad (4.18)$$

τ^a — матрицы Паули.

Как и в случае поля Янга — Миллса в пустоте, уравнения движения позволяют исключить часть переменных:

$$\mathcal{F}_{ik} = \partial_k \mathcal{A}_i - \partial_i \mathcal{A}_k + g [\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_k]; \quad (4.19)$$

$$\varphi_k = \nabla_k \varphi. \quad (4.20)$$

После этого лагранжиан принимает вид, характерный для обобщенной гамильтоновой системы:

$$\mathcal{L} = F_{0k}^a \partial_0 A_k^a + \varphi_0^+ \partial_0 \varphi + \partial_0 \varphi^+ \varphi_0 - h(F_{0k}, \mathcal{A}_k, \varphi_0, \varphi) + \\ + A_0^a \left(\partial_k F_{0k}^a - g \varepsilon^{abc} A_k^b F_{0k}^c + \frac{ig}{2} (\varphi_0^+ \tau^a \varphi - \varphi^+ \tau^a \varphi_0) \right), \quad (4.21)$$

где h — функция Гамильтона, явный вид которой мы не выписываем.

Как видно, пары F_{0k}^a , A_k^a и φ_0 , φ играют роль сопряженных канонических переменных, A_0^a — множитель Лагранжа, и

$$C^a = -\partial_k F_{0k}^a + g \varepsilon^{abc} A_k^b F_{0k}^c + \frac{ig}{2} (\varphi_0^+ \tau^a \varphi - \varphi^+ \tau^a \varphi_0) \quad (4.22)$$

— связь. Легко проверить, что выполнены условия коммутации типа (2.10), так что мы можем применить для квантования данной модели общие формулы из § 2.

Как уже обсуждалось в главе I, устойчивой вакуумной конфигурации соответствуют поля

$$A_\mu^a = 0; \quad \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Поэтому прежде чем переходить к квантованию, удобно сделать сдвиг

$$\varphi \rightarrow \varphi - \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

В результате такого сдвига связь (4.22) примет вид

$$C^a = -\partial_k F_{0k}^a + g \varepsilon^{abc} A_k^b F_{0k}^c + m_1 B_0^a + \\ + \frac{1}{2} g (\sigma B_0^a - B^a \sigma_0 - \varepsilon^{abc} B^b B_0^c), \quad (4.25)$$

где введены обозначения

$$\varphi^1 = \frac{iB^1 + B^2}{\sqrt{2}}; \quad \varphi^2 = \mu + \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma - iB^3), \quad m_1 = \frac{\mu g}{\sqrt{2}}, \quad (4.26)$$

а через B_0^a и σ_0 обозначены соответствующие канонические импульсы.

Мы видим, что связь содержит линейно член B_0^a ; поэтому естественно выбрать в качестве дополнительного условия (оно же условие калибровки)

$$B^a = 0. \quad (4.27)$$

Действительно матрица скобок Пуассона

$$\{C^a(x), B^b(y)\} = \left(m_1 + \frac{g}{2} \sigma(x)\right) \delta^{ab} \delta(x-y) + \dots, \quad (4.28)$$

где ... обозначают члены, исчезающие при $B^a = 0$, невырождена в рамках теории возмущений, т. е. при $|g\sigma| \ll m_1$.

В калибровке $B^a = 0$ квадратичная форма гамильтониана h и линейная форма связи C принимают вид

$$h_0 = \frac{1}{2} (F_{0k}^a)^2 + \frac{1}{4} (\partial_i A_k^a - \partial_k A_i^a)^2 + \frac{m_1^2}{2} (A_k^a)^2 + \frac{1}{2} (B_0^a)^2 + \\ + \frac{1}{2} \sigma_0^2 + \frac{1}{2} (\partial_k \sigma)^2 + \frac{m_2^2}{2} \sigma^2, \quad m_2 = 2\lambda\mu, \quad (4.29)$$

$$C_0^a = -\partial_k F_{0k}^a + m_1 B_0^a. \quad (4.30)$$

В качестве свободного гамильтониана h_0^* , определяющего спектр частиц в рамках теории возмущений, мы должны взять выражение, получающееся из h при подстановке в него решения связи $C_0 = 0$:

$$h_0^* = \frac{1}{2} (F_{0k}^a)^2 + \frac{1}{2m_1^2} (\partial_k F_{0k}^a)^2 + \frac{1}{4} (\partial_i A_k^a - \partial_k A_i^a)^2 + \\ + \frac{m_1^2}{2} (A_k^a)^2 + \frac{1}{2} \sigma_0^2 + \frac{1}{2} (\partial_k \sigma)^2 + \frac{m_2^2}{2} \sigma^2. \quad (4.31)$$

Выражение $\int h_0^* d^3x$ диагонализуется подстановкой

$$A_i^b(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^3 \int (e^{ikx} a_i^b(k) e_i^i(k) + \\ + e^{-ikx} a_i^{*b}(k) e_i^i(-k)) \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_1}}; \quad (4.32)$$

$$F_{0l}^b(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^3 \int (e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} a_i^b(\mathbf{k}) \tilde{e}_l^i(\mathbf{k}) - e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} a_i^{*b}(\mathbf{k}) \tilde{e}_l^i(-\mathbf{k})) \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\omega_1}{2}} d^3k, \quad (4.33)$$

где $e_l^1 = \tilde{e}_l^1$ и $e_l^2 = \tilde{e}_l^2$ — два произвольных ортонормированных вектора, ортогональных вектору $\mathbf{k}$, а

$$e_l^3 = \frac{k_l}{|\mathbf{k}|} \frac{\omega_1}{m_1}; \quad \tilde{e}_l^3 = \frac{k_l}{|\mathbf{k}|} \frac{m_1}{\omega_1}, \quad \omega_1 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_1^2}, \quad (4.34)$$

для векторного поля и стандартной подстановкой для скалярного поля σ . В результате свободный гамильтониан принимает вид

$$\int h_0^* d^3x = \int d^3k \left(\sum_{i=1}^3 a_i^{b*} a_i^b \omega_1 + a_\sigma^* a_\sigma \omega_2 \right), \quad \omega_2 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_2^2}. \quad (4.35)$$

Как видно из приведенных выкладок, спектр состоит из трех массивных векторных частиц и одной массивной скалярной частицы.

Теперь мы можем перейти к обсуждению S -матрицы. В обобщенной гамильтоновой формулировке выражение для ядра S -матрицы через континуальный интеграл можно записать в таком виде:

$$S = \lim_{\substack{t'' \rightarrow \infty \\ t' \rightarrow -\infty}} \int \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d^3k \left(\sum_{i=1}^3 (a_i^{b*}(\mathbf{k}, t'') a_i^b(\mathbf{k}, t'') + a_i^{b*}(\mathbf{k}, t') a_i^b(\mathbf{k}, t')) + a_\sigma^*(\mathbf{k}, t'') a_\sigma(\mathbf{k}, t'') + a_\sigma^*(\mathbf{k}, t') a_\sigma(\mathbf{k}, t')) + \right. \right. \\ \left. + i \int d^3x \int_{t'}^{t''} dt \left(\frac{1}{2} (F_{0k}^a \dot{A}_k^a - \dot{F}_{0k}^a A_k^a + \sigma_0 \dot{\sigma} - \dot{\sigma}_0 \sigma) - \right. \right. \\ \left. \left. - h(F_{0k}, A_k, B_0, B, \sigma_0, \sigma) + A_0^a C^a \right) \right\} \prod_x \delta(B^a) \left(m_1 + \frac{g\sigma}{2} \right)^3 \times \\ \times \prod_x dF_{0k} dA_k d\sigma_0 d\sigma dB_0 dB dA_0, \quad (4.36)$$

$$a_i^{*b}(\mathbf{k}, t'') = a_i^{*b}(\mathbf{k}) e^{i\omega_1 t''}, \quad a_i^b(\mathbf{k}, t') = a_i^b(\mathbf{k}) e^{-i\omega_1 t'}; \quad (4.37)$$

$$a_\sigma^*(\mathbf{k}, t'') = a_\sigma^*(\mathbf{k}) e^{i\omega_2 t''}; \quad a_\sigma(\mathbf{k}, t') = a_\sigma(\mathbf{k}) e^{-i\omega_2 t'}. \quad (4.38)$$

Переменные $a_i^b(\mathbf{k}, t)$, $a_i^{b*}(\mathbf{k}, t)$ здесь связаны с $A_k^b(\mathbf{x}, t)$, $F_{0k}^b(\mathbf{x}, t)$ формулами типа (4.32), (4.33):

$$\begin{aligned} A_i^b(\mathbf{x}, t) = & \\ = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \sum_{i=1}^3 [a_i^b(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} e_i^i(\mathbf{k}) + a_i^{b*}(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} e_i^i(-\mathbf{k})] \times \\ & \times \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_1}}, \quad (4.39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{0i}^b(\mathbf{x}, t) = & \\ = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \sum_{i=1}^3 [a_i^b(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tilde{e}_i^i(\mathbf{k}) - a_i^{b*}(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tilde{e}_i^i(-\mathbf{k})] \times \\ & \times \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\omega_1}{2}} d^3k. \quad (4.40) \end{aligned}$$

Приведем выражение (4.36) к явно релятивистски инвариантному виду, подобно тому, как мы это сделали для скалярного поля в § 3 гл. II. Для этого мы должны проинтегрировать по переменным B , σ_0 , B_0 и F_{0k} и перейти к пределу при $t'' \rightarrow \infty$, $t' \rightarrow -\infty$. Интегрирование по σ_0 и связанные с ним преобразования ничем не отличаются от уже рассмотренного случая скалярного поля и мы не будем их повторять. Интегрирование по переменной B_0 осуществляется после сдвига

$$B_0^a \rightarrow B_0^a - m_1 A_0^a, \quad (4.41)$$

в результате которого она отделяется от остальных переменных. Функции $B_0(\mathbf{x})$ и $A_0(\mathbf{x})$ не участвуют в граничных условиях, так что интегрирование по B_0 приводит только к изменению нормировочного множителя. В результате сдвига (4.41) к действию добавляется массовый член вида $\frac{m_1^2}{2} A_0^2$ для поля A_0 . Интегрирование по B_k снимает δ -функции в (4.36).

Для интегрирования по F_{0k} надо сделать сдвиг

$$F_{0k}^a = F_{0k}^{a(1)} + \partial_0 A_k^a - \partial_k A_0^a. \quad (4.42)$$

Интегрируя по частям, убеждаемся, что в новых переменных квадратичная форма действия, полученного из

(4.36) при уже сделанных преобразованиях, приобретает вид

$$-\frac{1}{2} \int A_k^a F_{0k}^a d^3x \Big|_{t'}^{t''} + \int_{t'}^{t''} dt \int d^3x \left[\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + \right. \\ \left. + \frac{m_1^2}{2} (A_\mu^a)^2 - \frac{1}{2} (F_{0k}^{a(1)})^2 \right]. \quad (4.43)$$

Сделаем теперь сдвиг переменной $\mathcal{A}_\mu$

$$A_\mu^a = A_\mu^{a(0)} + A_\mu^{a(1)}, \quad (4.44)$$

где $\mathcal{A}_\mu^{(0)}$ — решение свободного уравнения движения

$$(\square_{\mu\nu} + m_1^2 g_{\mu\nu}) \mathcal{A}_\nu^{(0)} = 0; \quad \square_{\mu\nu} = \square g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu, \quad (4.45)$$

порожденного квадратичной формой (4.43). Оно может быть записано в виде

$$A_\mu^{b(0)} = \\ = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} \int [a_i^b(\mathbf{k}) e^{-ikx} u_\mu^i(\mathbf{k}) + a_i^{b*}(\mathbf{k}) e^{ikx} u_\mu^i(-\mathbf{k})] \Big|_{k_0=\omega_1} \times \\ \times \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_1}}, \quad (4.46)$$

где

$$u_\mu^i = (0, e_k^i), \quad i = 1, 2; \quad u_\mu^3 = \left(i \frac{|\mathbf{k}|}{m}, e_k^3 \right), \quad (4.47)$$

и векторы e_k^i , $i = 1, 2$ введены в (4.32). Отметим, что $\mathcal{A}_\mu^{(0)}$ удовлетворяет соотношению

$$\partial_\mu \mathcal{A}_\mu^{(0)} = 0, \quad (4.48)$$

которому должны удовлетворять все решения уравнения (4.45).

Интегрируя по частям, $\mathcal{A}_\mu^{(0)}$ можно полностью исключить из квадратичной формы действия (4.43), в результате чего она принимает вид

$$\int d^3x \left[(\partial_0 A_k^{a(0)} - \partial_k A_0^{a(0)}) \left(A_k^a - \frac{1}{2} A_k^{a(0)} \right) - \frac{1}{2} F_{0k}^a A_k^a \right] \Big|_{t'}^{t''} + \\ + \int_{t'}^{t''} dt \int d^3x \left[-\frac{1}{2} (F_{0k}^{a(1)})^2 + \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^{a(1)} - \partial_\nu A_\mu^{a(1)})^2 + \right. \\ \left. + \frac{m_1^2}{2} (A_\mu^{a(1)})^2 \right]. \quad (4.49)$$

Внеинтегральные члены можно выразить через переменные $a_i^b(k)$, $a_i^{b*}(k)$, в результате чего первое слагаемое в (4.49) записывается в виде, аналогичном (II.3.40):

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \int d^3k \left\{ a_i^{b*}(k) a_i^b(k) - \frac{1}{2} [a_i^{b*}(k, t'') a_i^b(k, t'') + \right. \\ \left. + a_i^{b*}(k, t') a_i^b(k, t')] - (a_i^{b*}(k, t') - a_i^{b*}(k) e^{i\omega_1 t'})^2 - \right. \\ \left. - (a_i^b(k, t'') - a_i^b(k) e^{-i\omega_1 t''})^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Второе слагаемое в (4.49) остается конечным в пределе $t' \rightarrow -\infty$, $t'' \rightarrow \infty$, только если

$$\begin{aligned} A_0^b(x, t) = \\ = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} \int (a_3^b(k, t) e^{ikx} + a_3^{b*}(k, t) e^{-ikx}) i \frac{|k|}{m_1} \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_1}} + \\ + A_0^{b(1)}(x, t), \end{aligned} \quad (4.51)$$

где $A_0^{b(1)}$ — быстро убывающая функция, так же как и $F_{0k}^{b(1)}$. Соотношение (4.42) совместно с таким убыванием и граничными условиями (4.37), (4.38), если

$$\begin{aligned} a_i^{b*}(k, t') = e^{i\omega_1 t'} a_{i, \text{in}}^{b*}(k) + a_{i, 1}^{b*}(k, t'), \quad t' \rightarrow -\infty, \\ a_i^b(k, t'') = e^{-i\omega_1 t''} a_{i, \text{out}}^b(k) + a_{i, 1}^b(k, t''), \quad t'' \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.52)$$

где $a_{i, 1}^{b*}(k, t')$ быстро убывает при $t' \rightarrow -\infty$, а $a_{i, 1}^b(k, t'')$ — при $t'' \rightarrow \infty$. В результате мы видим, что в выражении (4.36) можно перейти к пределу при $t'' \rightarrow \infty$, $t' \rightarrow -\infty$, если переменные интегрирования $A_\mu^a(x, t)$ асимптотически ведут себя, как решения свободного уравнения (4.45)

$$A_\mu^a(x, t) = A_{\mu, \text{out}}^a(x, t) + A_{\mu, \text{out}}^{a(1)}(x, t), \quad (4.53)$$

где $A_{\mu, \text{in}}^{a(1)}$, $A_{\mu, \text{out}}^{a(1)}$ быстро убывают при $t \rightarrow -\infty$ и $t \rightarrow \infty$ соответственно, а $A_{\mu, \text{in}}^a$ и $A_{\mu, \text{out}}^a$ представляются в виде

$$\begin{aligned} A_{\mu, \text{out}}^b = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} \int \left[a_{i, \text{out}}^b(k) e^{-ikx} u_\mu(k) + \right. \\ \left. + a_{i, \text{out}}^{b*}(k) e^{ikx} u_\mu(-k) \right] \Big|_{k_0=\omega_1} \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_1}}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

где

$$a_{i, \text{in}}^b(k) = a_i^b(k); \quad a_{i, \text{out}}^{b*}(k) = a_i^{b*}(k). \quad (4.55)$$

На функции $a_{i, \text{out}}^b(\mathbf{k})$ и $a_{i, \text{in}}^{b*}(\mathbf{k})$ никаких условий не накладывается.

Из (4.54), (4.55) и (4.46) следует, что $A_\mu^{a(1)} = A_\mu^a - A_\mu^{a(0)}$ удовлетворяет фейнмановским граничным условиям, т. е. $A_\mu^{a(1)}$ не содержит сходящихся волн при $t \rightarrow -\infty$ и расходящихся волн при $t \rightarrow \infty$. На таких функциях квадратичная форма в (4.49) однозначно определена как квадратичная форма оператора

$$\square_{\mu\nu} + m_1^2 g_{\mu\nu}, \quad (4.56)$$

участвующего в уравнении (4.45).

Дальнейшие преобразования выражения (4.36) буквально повторяют рассуждения из § 3 гл. II. В результате для нормального символа S -матрицы мы получаем окончательное явно релятивистское выражение

$$S(A_\mu^{(0)}, \sigma^{(0)}) = \int_{\substack{A \rightarrow A_{\text{in}} \\ \sigma \rightarrow \sigma_{\text{in}} \\ \text{out} \\ \text{out}}} \exp \left\{ i \int \mathcal{L}(x) dx \right\} \prod_x \left(m_1 + \frac{g}{2} \sigma \right)^3 dA_\mu d\sigma, \quad (4.57)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} (\partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a + g \varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c)^2 + \frac{m_1^2}{2} A_\mu^2 + \\ & + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial_\mu \sigma - \frac{m_2^2}{2} \sigma^2 + \frac{m_1 g}{2} \sigma A_\mu^2 + \frac{g^2}{8} \sigma^2 A_\mu^2 - \\ & - \frac{g m_2}{4 m_1} \sigma^3 - \frac{g^2 m_2^2}{32 m_1^2} \sigma^4. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Асимптотические условия для полей σ имеют вид, аналогичный (II.3.47):

$$\sigma_{\text{in}}^{\text{out}}(x) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{3/2} \int \left(a_{\sigma, \text{in}}^{\text{out}}(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a_{\sigma, \text{in}}^{\text{out}*}(\mathbf{k}) e^{ikx} \right) \Big|_{k_0=\omega_2} \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_2}}, \quad (4.59)$$

где $a_{\sigma, \text{out}}^*(\mathbf{k}) = a_\sigma^*(\mathbf{k})$; $a_{\sigma, \text{in}}(\mathbf{k}) = a_\sigma(\mathbf{k})$. Асимптотические условия для полей A_μ^b даны в (4.54), (4.55).

Квадратичная форма в действии $\int \mathcal{L}(x) dx$ определена как

$$\frac{1}{2} \int (A_\mu - A_\mu^{(0)}) (\square_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} m_1^2) (A_\mu - A_\mu^{(0)}), \quad (4.60)$$

где оператор $(\square_{\mu\nu} + m_1^2 g_{\mu\nu})$ снабжен фейнмановскими граничными условиями.

Производящий функционал для функций Грина

$$Z(J, \eta) = \int \exp \left\{ i \int (\mathcal{L}(x) + J_\mu^a A_\mu^a + \sigma \eta) dx \right\} \times \\ \times \prod_x \left(m_1 + \frac{g}{2} \sigma \right)^3 d\mathcal{A}_\mu d\sigma \quad (4.61)$$

и вытекающая из него диаграммная техника теории возмущений содержат некоторые новые элементы. Во-первых, функция распространения векторного поля (4.50), которую можно переписать в виде

$$D_{\mu\nu}^c(x-y) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^4 \int e^{ik(x-y)} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m_1^2} \right) \times \\ \times \frac{1}{k^2 - m_1^2 + i0} d^4k, \quad (4.62)$$

более сингулярна при $x \sim y$, чем встречавшиеся нам до сих пор функции Грина. Действительно, ее продольная часть

$$\frac{k_\mu k_\nu}{m_1^2} \frac{1}{k^2 - m_1^2 + i0} \quad (4.63)$$

не убывает при больших k , так что ее вклад в пропагатор имеет сингулярность силы $\delta^{(4)}(x)$. Во-вторых, мера интегрирования содержит локальный множитель $\det M_\Phi$. Его можно формально записать в виде

$$\det M_\Phi = \prod_x \left(m_1 + \frac{g}{2} \sigma(x) \right)^3 = \\ = \text{const} \cdot \exp \left\{ V \int \ln \left(m_1 + \frac{g\sigma(x)}{2} \right)^3 dx \right\} = \\ = \text{const} \cdot \exp \left\{ \delta^{(4)}(0) \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \int \left(\frac{g\sigma(x)}{2m_1} \right)^n dx \right] \right\}, \quad (4.64) \\ V = \int dx = \delta^{(4)}(0).$$

В рамках теории возмущений такая добавка к действию порождает новые диаграммы, вклад которых пропорционален степеням $\delta^{(4)}(0)$ (конечно, это выражение

следует понимать в смысле некоторой объемной регуляризации). Роль этих диаграмм состоит в том, чтобы компенсировать сингулярные части других диаграмм, возникающих в теории возмущений. Такие сингулярности возникают при произведении δ -образных вкладов в функции Грина векторных частиц.

Оба отмеченных отличия диаграммной техники для лагранжиана (4.58) показывают, что она содержит неудобные сингулярности. Поэтому рассматриваемую модель удобнее исследовать в лоренцевой калибровке, или α -калибровке, которые можно просто ввести, пользуясь уже знакомыми нам приемами. Роль же рассмотренной калибровки (которую часто называют унитарной) состоит в том, что она явно релятивистски инвариантно задает спектр частиц и асимптотические состояния модели. В этом смысле она заменяет нам кулоновскую калибровку теории Янга — Миллса в пустоте.

Мы не будем еще раз описывать процедуру перехода к α -калибровке, которая не требует в данном случае новых соображений, так как поле $\partial_\mu A_\mu$ не распространяется. Нормальный символ S -матрицы задается континуальным интегралом

$$S = N^{-1} \int_{\substack{\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_{\text{in}} \\ \sigma \rightarrow \sigma_{\text{out}}}} \exp \left\{ i \int \left(\mathcal{L}(x) + \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2 \right) dx \right\} \times \\ \times \det M_\alpha \prod_x d_\mu A d\mathcal{B} d\sigma, \quad (4.65)$$

где

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{m_1^2}{2} A_\mu^2 + m_1 A_\mu^a \partial_\mu B^a + \frac{1}{2} \partial_\mu B^a \partial_\mu B^a + \\ + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial_\mu \sigma - \frac{m_2^2}{2} \sigma^2 + \frac{g}{2} A_\mu^a (\sigma \partial_\mu B^a - B^a \partial_\mu \sigma - \varepsilon^{abc} B^b \partial_\mu B^c) + \\ + \frac{m_1 g}{2} \sigma A_\mu^2 + \frac{g^2}{8} (\sigma^2 + B^2) A_\mu^2 - \frac{g n_2^2}{4m_1} \sigma (\sigma^2 + B^2) - \\ - \frac{g^2 m_2^2}{32m_1^2} (\sigma^2 + B^2)^2, \quad (4.66)$$

и

$$M_\alpha u = Mu = \square u - g \partial_\mu [\mathcal{A}_\mu, u]. \quad (4.67)$$

Асимптотические условия на A_μ^a и σ те же, что и выше. Поля $\partial_\mu A_\mu^a$, B^a и фиктивные частицы $\bar{c}^a$, c^a , участвующие в определении $\det M$, не распространяются. При построении диаграммной техники для них удобно (но не обязательно) использовать фейнмановские граничные условия. Производящий функционал для функций Грина стандартно строится по выражению (4.65) для S -матрицы.

Диаграммная техника в α -калибровке общего вида несколько громоздка из-за наличия смешанных функций распространения $\overline{A_\mu^a B^c}$. При вычислениях наиболее удобно пользоваться лоренцевой калибровкой $\alpha = 0$. В этой калибровке диаграммная техника содержит следующие элементы:

1. Линии векторной частицы соответствует функция распространения

$$\mu, \bar{a} \text{ --- } \overset{k}{\text{~~~~~}} \text{ --- } b, \nu = \delta^{ab} \left[\frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu k^{-2}}{k^2 - m_1^2 + i0} \right]. \quad (4.68)$$

2. Функции распространения фиктивных частиц $\bar{c}$, c и вершины их взаимодействия с векторной частицей те же, что для поля Янга — Миллса в пустоте.

3. Линиям скалярных частиц B^a и σ соответствуют функции распространения

$$\overset{a}{\text{---}} \cdot \overset{k}{\text{---}} \cdot \overset{b}{\text{---}} = \frac{\delta^{ab}}{k^2 + i0} \quad (4.69)$$

$$\text{---} \cdot \overset{k}{\text{---}} \cdot \text{---} = \frac{1}{k^2 - m_2^2 + i0}. \quad (4.70)$$

4. Многочисленные вершины взаимодействия полей $\mathcal{A}_\mu$, $\mathcal{B}$ и σ , которые легко выписываются по лагранжиану (4.66).

Формулы приведения выглядят обычным образом, и мы опишем их словами. Внешние концы в функциях Грина следует брать лишь для векторных частиц и частиц поля σ . Каждый конец, соответствующий векторному полю, умножается на $(k_j^2 - m_1^2)$ и на вектор поляризации $u_\mu^i(k_j)$. Каждый конец, соответствующий полю σ ,

умножается на $(p_l^2 - m_2^2)$. Затем следует перейти на массовую поверхность $k_j^2 = m_1^2$, $p_l^2 = m_2^2$, считая, что k_0 и p_0 положительны для уходящих частиц и отрицательны для приходящих частиц.

Другой вариант диаграммной техники можно получить, если выбрать в качестве снимающего вырождение функционала B , фигурирующего в формуле (3.42), выражение

$$\exp \left\{ \frac{i}{2\alpha} \int (\partial_\mu A_\mu^a - \alpha m_1 B^a)^2 dx \right\}. \quad (4.71)$$

Выкладки, полностью аналогичные тем, которые привели нас к выражению для S -матрицы в α -калибровке, приводят к следующему результату:

$$S = N^{-1} \int_{\substack{A \rightarrow A_{\text{in}} \\ \sigma \rightarrow \sigma_{\text{in}} \\ \text{out}}} \exp \left\{ i \int \left[\mathcal{L}(x) + \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu^a - \alpha m_1 B^a)^2 \right] dx \right\} \times \\ \times \prod_x \det M_x dA_\mu dB d\sigma, \quad (4.72)$$

где лагранжиан $\mathcal{L}$ по-прежнему дается формулой (4.66), а оператор M_x выглядит следующим образом:

$$M_x u = (\square + \alpha m_1^2) u - g \partial_\mu [\mathcal{A}_\mu, u] + \frac{\alpha g m_1}{2} [\mathcal{B}, u] + \\ + \frac{\alpha m_1 g}{2} \sigma u. \quad (4.73)$$

Как и раньше, $\det M_x$ можно представить в виде интеграла по полям фиктивных частиц

$$\det M_x = \int \exp \left\{ i \int \bar{c}^a(x) M_x^{ab} c^b(x) dx \right\} \prod_x d\bar{c} dc. \quad (4.74)$$

Недиагональный по полям A_μ , B член $m_1 A_\mu^a \partial_\mu B^a$, присутствующий в лагранжиане (4.66), сокращается с аналогичным членом в выражении, фиксирующем калибровку. В результате смешанные функции распространения $\overline{A_\mu^a B^b}$ отсутствуют. Правила Фейнмана отличаются от сформулированных выше в следующих пунктах:

1. Векторной линии соответствует функция распространения

$$= \delta^{ab} \left[\frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu k^{-2}}{k^2 - m_1^2 + i0} + \frac{k_\mu k_\nu k^{-2}}{(k^2 \alpha^{-1} - m_1^2 + i0)} \right]. \quad (4.75)$$

2. Скалярной B -линии соответствует функция распространения

$$\frac{\delta^{ab}}{p^2 - m_1^2 \alpha + i0}. \quad (4.76)$$

3. Фиктивным частицам соответствует функция распространения

$$= \frac{\delta^{ab}}{p^2 - m_1^2 \alpha + i0}. \quad (4.77)$$

4. Появляются дополнительные вершины взаимодействия фиктивных частиц с полями B^a и σ , явный вид которых легко получить из формул (4.73), (4.74).

При $\alpha = 0$ эти правила, очевидно, совпадают с сформулированными выше для случая лоренцевой калибровки.

На этом мы заканчиваем описание примеров взаимодействия поля Янга — Миллса с полями материи. Мы надеемся, что эти примеры достаточно характерны, и читатель без труда построит диаграммную технику для произвольной модели, как с нарушенной, так и с ненарушенной симметрией.

ПЕРЕНОРМИРОВКА КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ

§ 1. Примеры простейших диаграмм

Развитая в предыдущей главе диаграммная техника позволяет вычислять функции Грина и вероятности процессов рассеяния с точностью до любого порядка по g . Однако прямое применение сформулированных выше правил для вычисления диаграмм, содержащих замкнутые циклы, приводит к бессмысленному результату — соответствующие интегралы расходятся при больших импульсах. Придание этим выражениям смысла составляет содержание процедуры перенормировки, изучением которой мы будем заниматься в этой главе.

В качестве простейшего примера рассмотрим поправку второго порядка к функции Грина фиктивной частицы в теории Янга — Миллса с калибровочной группой

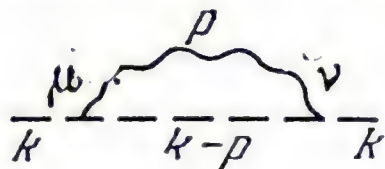


Рис. 1. Поправка второго порядка к функции Грина фиктивной частицы. Пунктирная линия обозначает функцию распространения фиктивной частицы, волнистая — поля Янга — Миллса.

$SU(2)$. Эта поправка описывается диаграммой, изображенной на рис. 1. Соответствующее аналитическое выражение имеет вид

$$- \frac{g^2}{k^2 + i0} \Sigma(k^2) \frac{1}{k^2 + i0}, \quad (1.1)$$

где в диагональной α -калибровке ($\alpha = 1$)

$$\Sigma(k^2) = - \frac{i2k_\nu g_{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int \frac{dp (k-p)_\mu}{(p^2 + i0) [(k-p)^2 + i0]}. \quad (1.2)$$

При $p \rightarrow \infty$ этот интеграл линейно расходится. Чтобы придать интегралу (1.2) смысл, введем прежде всего промежуточную регуляризацию, заменив функцию $(p^2 + i0)^{-1}$ регуляризованным выражением

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2 + i0)} &\rightarrow \frac{1}{(p^2 + i0)} - \frac{1}{p^2 - \Lambda^2 + i0} = \\ &= - \int_0^{\Lambda^2} \frac{d\lambda}{(p^2 - \lambda + i0)^2}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

При $\Lambda \rightarrow \infty$ регуляризованная функция Грина стремится к исходному выражению $(p^2 + i0)^{-1}$. При конечных Λ интеграл

$$\Sigma_{\Lambda}(k^2) = \frac{2ik_{\nu}}{(2\pi)^4} \int_0^{\Lambda^2} d\lambda \int \frac{dp (k-p)_{\nu}}{[p^2 - \lambda + i0]^2 [(k-p)^2 + i0]} \quad (1.4)$$

сходится. Для его вычисления воспользуемся формулой Фейнмана

$$\frac{1}{a^2 b} = \int_0^1 \frac{2z dz}{[az + b(1-z)]^3}. \quad (1.5)$$

Эта формула позволяет объединить оба множителя в знаменателе интеграла (1.4) в один

$$\begin{aligned} \Sigma_{\Lambda}(k^2) &= \frac{2ik_{\nu}}{(2\pi)^4} \int_0^{\Lambda^2} d\lambda \int_0^1 dz 2z \times \\ &\times \int \frac{dp (k-p)_{\nu}}{[(p^2 - \lambda + i0) z + (k^2 - 2pk + p^2 + i0)(1-z)]^3}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Переходя к новым переменным

$$p \rightarrow p + k(1-z), \quad (1.7)$$

получаем

$$\begin{aligned} \Sigma_{\Lambda}(k^2) &= \frac{2ik_{\nu}}{(2\pi)^4} \int_0^{\Lambda^2} d\lambda \int_0^1 dz 2z \times \\ &\times \int \frac{dp (kz - p)_{\nu}}{[p^2 + k^2(1-z)z - \lambda z + i0]^3}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Интеграл

$$\int dp p_\nu f(p^2) \quad (1.9)$$

равен нулю по соображениям симметрии.

В остающемся интеграле можно повернуть контур интегрирования на 90° и ввести новую переменную интегрирования $p_0 \rightarrow ip_0$.

В результате интеграл по p принимает вид

$$I = -i \int \frac{dp}{(p^2 + c)^3}, \quad (1.10)$$

где интегрирование ведется по четырехмерному евклидову пространству. Вычисление интеграла (1.10) дает

$$I = -\frac{i\pi^2}{2c}. \quad (1.11)$$

В результате получаем следующее выражение для функции $\Sigma_\Lambda(k^2)$:

$$\Sigma_\Lambda(k^2) = -\frac{k^2}{16\pi^2} \int_0^{\Lambda^2} d\lambda \int_0^1 dz \frac{2z^2}{k^2(1-z)z - \lambda z}. \quad (1.12)$$

Интеграл по λ берется явно. При $k^2 < 0$ получаем

$$\Sigma_\Lambda(k^2) = \frac{2k^2}{16\pi^2} \int_0^1 dz \cdot z \ln \frac{k^2(1-z)z - \Lambda^2 z}{k^2(1-z)z}; \quad (k^2 < 0). \quad (1.13)$$

При стремлении $\Lambda \rightarrow \infty$ это выражение, как и следовало ожидать, логарифмически расходится. Процедура перенормировки состоит в замене интеграла, фигурирующего в (1.13), выражением, получающимся из него вычитанием нескольких первых членов разложения в ряд Тейлора (в данном случае одного). Разлагая подынтегральное выражение в точке $k^2 = \kappa$, получаем

$$\begin{aligned} \Sigma_\Lambda(k^2) = \frac{2k^2}{16\pi^2} \left\{ \int_0^1 z dz \ln \frac{\kappa(1-z)z - \Lambda^2 z}{\kappa(1-z)z} + \right. \\ \left. + \int_0^1 z dz \left[\ln \frac{k^2(1-z)z - \Lambda^2 z}{\kappa(1-z)z} - \ln \frac{k^2(1-z)z}{\kappa(1-z)z} \right] \right\}. \quad (1.14) \end{aligned}$$

При $\Lambda \rightarrow \infty$ второй и третий члены стремятся к определенному пределу, равному

$$\Sigma_R(k^2) = -\frac{k^2}{16\pi^2} \ln \frac{k^2}{\kappa}. \quad (1.15)$$

Первый член при $\Lambda \rightarrow \infty$ не имеет предела и ведет себя как

$$-k^2 g^{-2} (1 - \tilde{z}_2) = \frac{k^2}{16\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{-\kappa} + \dots \right). \quad (1.16)$$

Разбиение (1.14) не однозначно. Выбирая в качестве центра разложения вместо точки κ какую-нибудь другую точку, мы получили бы для $\Sigma_R(k^2)$ выражение, отличающееся от (1.15) на конечный полином по k^2 . Таким образом, общее выражение для перенормированной функции Грина с точностью до второго порядка по g^2 имеет вид

$$-\frac{1}{k^2 + i0} \left(1 + \tilde{b}_2 - \frac{g^2}{16\pi^2} \ln \frac{k^2}{\kappa} \right), \quad (1.17)$$

где $\tilde{b}_2$ — произвольная постоянная.

Замена расходящегося интеграла (1.2) перенормированным выражением (1.15) эквивалентна модификации исходного лагранжиана. Действительно, заменим лагранжиан фиктивных частиц следующим выражением:

$$-\frac{\text{tr}}{2} \bar{c} \partial_\mu \nabla_\mu c \rightarrow -\frac{\text{tr}}{2} \{ \bar{c} \square c - g \bar{c} \partial_\mu [A_\mu, c] + (\tilde{z}_2 - 1) \bar{c} \square c \}, \quad (1.18)$$

где $\tilde{z}_2$ определяется формулой (1.16). Поскольку последний член $\sim g^2$, будем относить его к лагранжиану взаимодействия. Тогда в разложении по теории возмущений



Рис. 2.

помимо диаграммы (1) появится новая диаграмма (рис. 2), где крестиком обозначена вершина, отвечающая «контрчлену» $(\tilde{z}_2 - 1) \bar{c} \square c$.

Очевидно, что поправка к функции Грина, отвечающая сумме диаграмм (1) и (2), дается формулой (1.17) (при $\tilde{b}_2 = 0$). На этом простом примере мы видим, что

вычитание первых членов разложения в ряд Тейлора эквивалентно изменению (перенормировке) параметров исходного лагранжиана (в данном случае постоянной нормировки волновой функции фиктивных частиц).

Проиллюстрируем это наблюдение еще одним примером. Вычислим поправку третьего порядка к вершинной функции $\Gamma_{cc}^- \tilde{\mathcal{A}}_\mu$, отвечающей переходу двух фиктивных частиц в одну векторную. Диаграммы, дающие

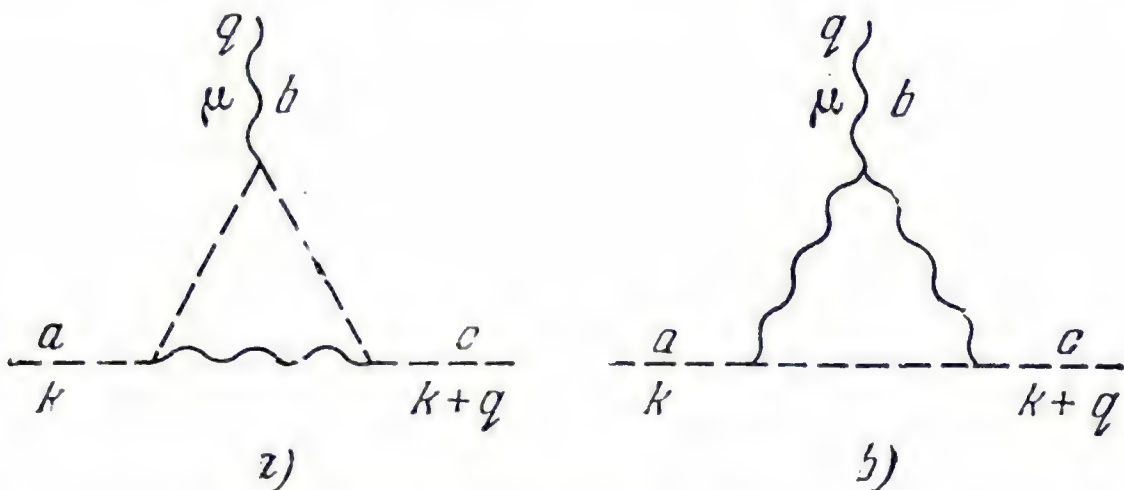


Рис 3. Поправки третьего порядка к вершинной функции $\Gamma_{cc}^- \tilde{\mathcal{A}}_\mu$.

вклад в $\Gamma_{cc}^- \tilde{\mathcal{A}}_\mu$ в третьем порядке по g , изображены на рис. 3.

Для простоты ограничимся случаем нулевого переданного импульса $q = 0$.

Диаграмме a соответствует интеграл

$$I_a = -ig^3 \varepsilon^{abc} \int \frac{dp (k-p)_\alpha (k-p)_\mu k_\beta g_{\alpha\beta}}{(2\pi)^4 (p^2 + i0) [(k-p)^2 + i0]^2}. \quad (1.19)$$

Вводя промежуточную регуляризацию с помощью формулы (1.3) и пользуясь соотношением

$$\frac{1}{a^2 b^2} = \int_0^1 \frac{6z(1-z) dz}{[az + b(1-z)]^4}, \quad (1.20)$$

запишем этот интеграл в виде

$$I_a = -\frac{ig^3 \varepsilon^{abc} k_\alpha}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz \int_0^\Lambda d\lambda \times \\ \times \int dp \frac{(k-p)_\alpha (k-p)_\mu 6z(1-z)}{[p - k(1-z)]^2 + k^2(1-z)z - \lambda z}^4. \quad (1.21)$$

Замена переменных (1.7) дает

$$I_a = - \frac{ig^3 \varepsilon^{abc} k_a}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz \int_0^{\Lambda^2} d\lambda \times \\ \times \int dp \frac{(kz - p)_\alpha (kz - p)_\mu 6z(1-z)}{\{p^2 + k^2(1-z)z - \lambda z\}^4}. \quad (1.22)$$

Нечетные степени p не дают вклада по соображениям симметрии. По тем же соображениям

$$\int dp p_\mu p_\nu f(p^2) = \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \int dp p^2 f(p^2). \quad (1.23)$$

Переходя в евклидовой метрике и выполняя интегрирование по p , получаем

$$I_a = - \frac{ig^3 \varepsilon^{abc} k_a}{(2\pi)^4} \times \\ \times \left\{ \int_0^1 dz \int_0^{\Lambda^2} d\lambda z^2 (1-z) k_\alpha k_\mu \frac{i\pi^2}{\{k^2(1-z)z - \lambda z\}^2} + \right. \\ \left. + g_{\alpha\mu} \int_0^1 dz \frac{(-i\pi)^2 2}{4} z(1-z) \int_0^{\Lambda^2} d\lambda \frac{1}{\{k^2(1-z)z - \lambda z\}} \right\}. \quad (1.24)$$

Интегрирование по λ дает

$$I_a = \frac{g^3}{16\pi^2} \varepsilon^{abc} k^2 k_\mu \times \\ \times \int_0^1 \left\{ \frac{1}{k^2(1-z)z - \Lambda^2 z} - \frac{1}{k^2(1-z)z} \right\} z^2 (1-z) dz + \\ + \frac{g^3}{32\pi^2} \varepsilon^{abc} k_\mu \int_0^1 \ln \frac{k^2(1-z)z - \Lambda^2 z}{k^2(1-z)z} (1-z) dz \quad (k^2 < 0). \quad (1.25)$$

Первый член в формуле (1.25) при $\Lambda \rightarrow \infty$ стремится к определенному пределу, а второй логарифмически расходится. Так же как и в случае диаграммы второго порядка, к определенному пределу стремится выражение, полученное вычитанием из второго интеграла первого

члена разложения в ряд Тейлора. При $\Lambda \rightarrow \infty$, I_a можно представить в виде

$$I_a = \frac{g^3 \varepsilon^{abc} k_\mu}{64\pi^2} \left(b_\kappa^1 - \ln \frac{k^2}{\kappa} \right) + \frac{g^3 \varepsilon^{abc} k_\mu}{64\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{-\kappa}, \quad (1.26)$$

где b_κ^1 — конечная константа, зависящая от выбора точки κ .

Совершенно аналогично вычисляется диаграмма b . Соответствующий интеграл имеет вид

$$I_b = -ig^3 \varepsilon^{abc} \times \\ \times \int \frac{dp}{(2\pi)^4} \frac{(k-p)_\alpha k_\beta \{2p_\mu g_{\sigma\rho} - p_\sigma g_{\mu\rho} - p_\rho g_{\mu\sigma}\} g_{\alpha\sigma} g_{\rho\beta}}{[(k-p)^2 + i0][p^2 + i0]^2}. \quad (1.27)$$

Повторяя сделанные выше выкладки, получаем при $\Lambda \rightarrow \infty$

$$I_b = \frac{g^3 \varepsilon^{abc} k_\mu}{64\pi^2} \left(b_\kappa^2 - 3 \ln \frac{k^2}{\kappa} \right) + \frac{3g^3 \varepsilon^{abc} k_\mu}{64\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{-\kappa}. \quad (1.28)$$

Вычитая из суммы $I_a + I_b$ члены, пропорциональные $\ln \frac{\Lambda^2}{-\kappa}$, получаем выражение для перенормированной вершинной функции в виде

$$I^R = \frac{g^3 \varepsilon^{abc} k_\mu}{16\pi^2} \left(\tilde{b}_1 - \ln \frac{k^2}{\kappa} \right), \quad (1.29)$$

где $\tilde{b}_1$ — произвольная константа. Сделанное вычитание эквивалентно введению в лагранжиан контрчлена

$$\frac{\text{tr}}{2} \{g(\tilde{z}_1 - 1) \bar{c} \partial_\mu [\mathcal{A}_\mu, c]\}, \quad (1.30)$$

где

$$\tilde{z}_1 - 1 = -\frac{g^2}{16\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{-\kappa} + \tilde{b}_1 \right). \quad (1.31)$$

В заключение приведем без вычислений выражения для поправок низшего порядка к функции Грина поля Янга — Миллса и тройной вершине Γ_A , которые описываются диаграммами, изображенными на рис. 4 и 5.

Контрчлены, устраняющие расходимости из этих диаграмм, имеют вид

$$-\frac{\text{tr}}{8} \{ (z_2 - 1) (\partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu)^2 + 2g (z_1 - 1) \times \\ \times (\partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu) [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] \}, \quad (1.32)$$

где

$$z_2 - 1 = \frac{g^2 \cdot 5}{24\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{-\kappa} + b_2, \quad (1.33)$$

$$z_1 - 1 = \frac{g^3}{12\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{-\kappa} + b_1, \quad (1.34)$$

b_1 и b_2 — произвольные конечные постоянные.

Как видно, для устранения расходимостей из рассмотренных диаграмм действительно достаточно переопределить параметры, входящие в исходный лагранжиан. Заметим, однако, что контрчлены (1.16), (1.30),

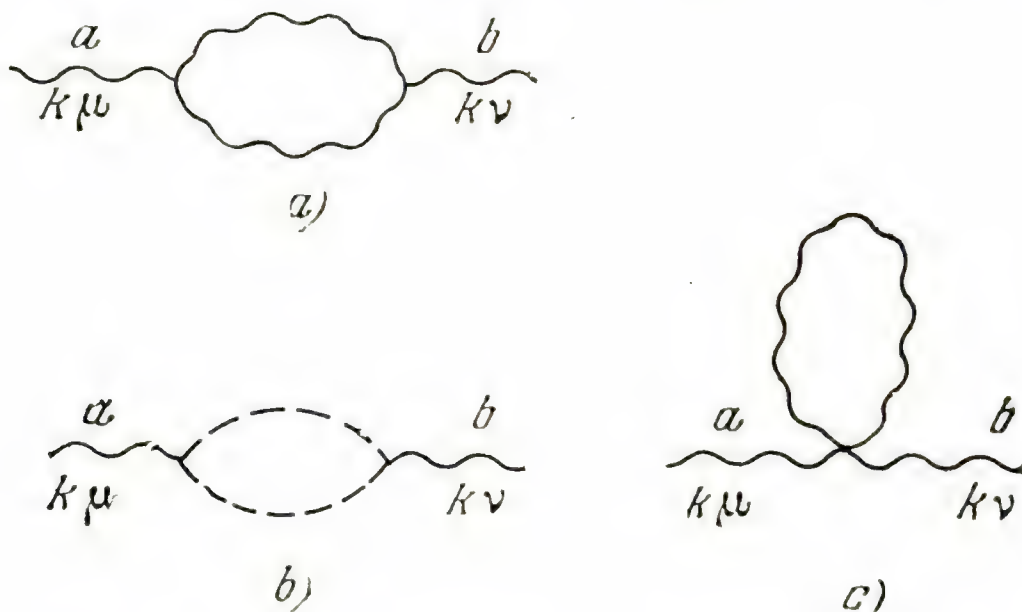


Рис 4. Поправки второго порядка к функции Грина поля Янга — Миллса.

(1.32), вообще говоря, не калибровочно-инвариантны. Их явный вид зависит от используемой промежуточной регуляризации и выбора точек вычитания. В частности, для устранения расходимостей из двухточечной функции Грина может оказаться необходимым введение явно неинвариантного контрчлена

$$\delta m \text{tr} \{ \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\mu \}. \quad (1.35)$$

Разумеется, физический смысл имеют не сами контрчлены, а перенормированные, конечные матричные эле-

менты. Для того чтобы теория оставалась самосогласованной, необходимо, чтобы перенормированные матричные элементы удовлетворяли принципу относительности.

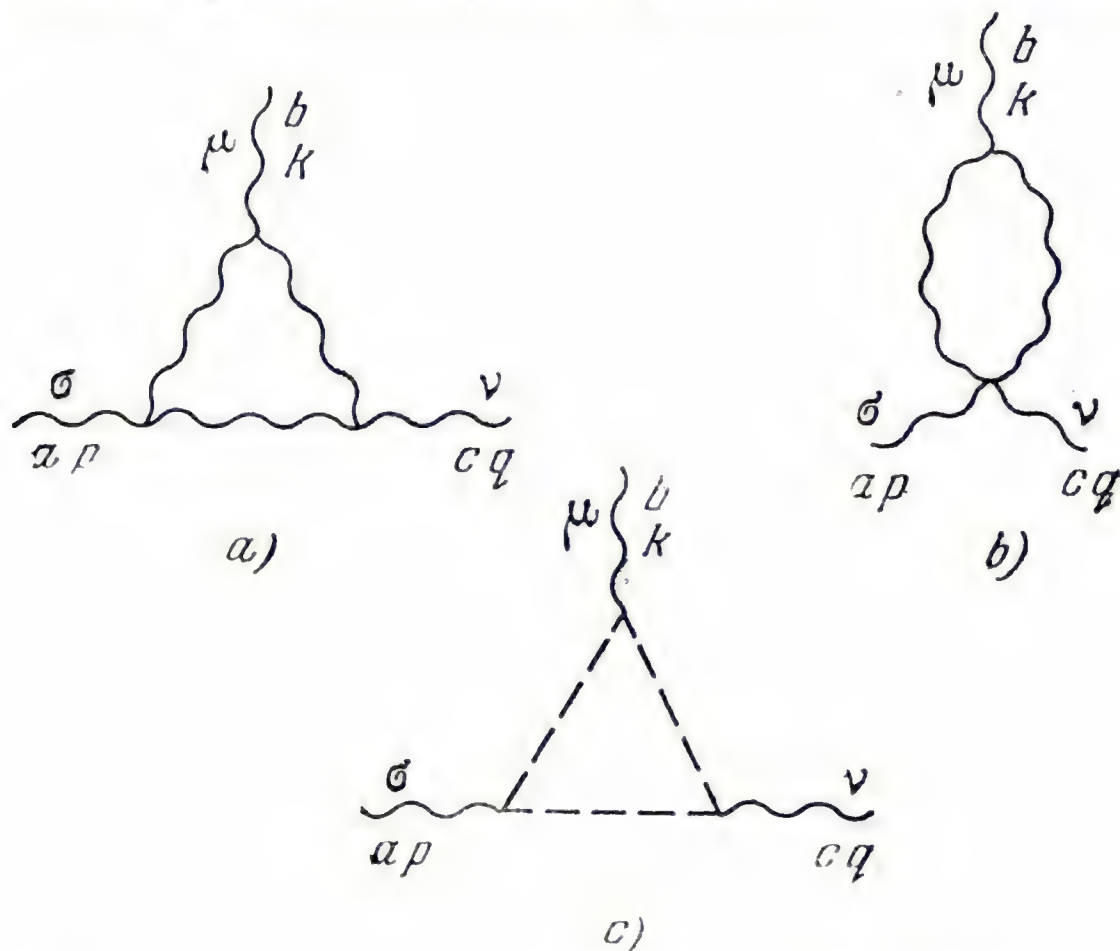


Рис. 5. Поправки третьего порядка к вершинной функции Γ_{A3} .

В этом состоит специфика перенормировочной процедуры в калибровочных теориях, исследованием которой мы будем заниматься в этой главе.

§ 2. R-операция и контрчлены

В предыдущем параграфе мы обсудили процедуру устранения расходимостей из простейших диаграмм. В рассмотренных примерах присутствует лишь одно интегрирование по dk и для того, чтобы при снятии промежуточной регуляризации соответствующие функции стремились к определенному пределу, достаточно вычесть несколько первых членов их разложения в ряд Тейлора по внешним импульсам. Как мы видели, такое вычитание эквивалентно переопределению исходного лагранжиана — введению контрчленов.

Более сложным диаграммам, например, диаграмме, изображенной на рис. 6, отвечают интегралы вида

$$\int f(p_1, \dots, p_m, k_1, \dots, k_n) dk_1 \dots dk_n, \quad (2.1)$$

которые могут расходиться не только при одновременном стремлении всех k_i к бесконечности, но и при стремлении к бесконечности части аргументов k_i при фиксированных остальных. В этом случае говорят, что диаграмма имеет расходящиеся подграфы. Для диаграммы на рис. 6 такими подграфами являются совокупности вершин (1, 2, 3) и соединяющих их линий, и совокупность вершин (2, 3, 4) и соединяющих их линий. Для диаграмм,

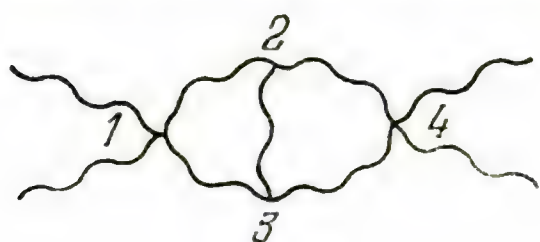


Рис. 6

имеющих расходящиеся подграфы, простой рецепт устранения расходимостей, сформулированный в § 1, уже недостаточен. В этом случае решение задачи дается R -операцией Боголюбова — Парасюка, которая ставит в

соответствие любой диаграмме Фейнмана конечную коэффициентную функцию. Подробное обсуждение R -операции можно найти в книге Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова, и мы не будем здесь его повторять. Для наших целей достаточно знать, что R операция эквивалентна введению в лагранжиан контрчленов, представимых в виде ряда по константе взаимодействия. Для формулировки соответствующего рецепта нам понадобятся несколько определений. Диаграмма называется связной, если ее нельзя разбить на части, которые не соединены друг с другом линиями. Диаграмма называется сильно связной, или одночастично неприводимой, если ее нельзя превратить в несвязную снятием одной линии. Сильно связную диаграмму, у которой ампутированы все внешние линии, будем называть собственной вершинной функцией и обозначать $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$. Сильно связная функция Грина $G(x_1, \dots, x_n)$ выражается через собственную вершинную функцию $\Gamma(x_1, \dots, x_n)$ соотношением

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_n) &= \\ &= \int dx'_1 \dots dx'_n G_1(x_1 - x'_1) \dots G_n(x_n - x'_n) \Gamma(x'_1, \dots, x'_n), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $G_i(x_i - x'_i)$ — двухчастичная функция Грина, соответствующая i -ой внешней линии. Топологическую структуру диаграмм удобно характеризовать числом незави-

симых циклов, содержащихся в данной диаграмме. Диаграммы с одним циклом называются однопетлевыми, с двумя циклами — двухпетлевыми и т. д. Диаграммы с данным числом петель являются членами одного порядка в квазиклассическом разложении S -матрицы или производящего функционала для функций Грина по постоянной Планка $\hbar$. В силу этого они образуют инвариантную совокупность, т. е. все свойства симметрии, которыми обладает полная S -матрица, выполняются независимо для совокупности диаграмм с фиксированным числом петель.

Для характеристики устраняющей расходимости вычитательной процедуры вводится понятие индекса диаграммы. Пусть данной сильно связной диаграмме порядка n соответствует коэффициентная функция, фурье-образ которой имеет вид

$$J(k) = \int \prod_{1 \leq q \leq n} \delta \left(\sum p - k_q \right) \prod_{l=1}^L D_l(p_l) dp_l, \quad (2.3)$$

где индекс q нумерует вершины, а l внутренние линии. В аргументе δ -функции стоит алгебраическая сумма импульсов, входящих в вершину с номером q . Функция Грина $D_l(p_l)$ имеет вид

$$D_l(p_l) = Z(p_l) (m_l^2 - p_l^2)^{-1}, \quad (2.4)$$

где $Z(p_l)$ полином степени r_l .

Сделаем масштабное преобразование всех импульсных переменных (и масс): $p_i, k_i \rightarrow ap_i, ak_i$. Если интеграл $J(k)$ сходится, то при таком преобразовании он умножится на a^ω , где индекс диаграммы ω складывается из следующих факторов: каждая внутренняя линия вносит вклад $r_l - 2$, что в сумме дает $\sum_{l=1}^L (r_l - 2)$, где L — полное число внутренних линий. В формуле (2.3) интегрирование ведется по L переменным p_l , однако $(n - 1)$ -интеграл снимается δ -функциями (одна δ -функция выражает закон сохранения полного импульса). Поэтому остается $4(L - n + 1)$ независимых дифференциалов, которые дают суммарный вклад $4(L - n + 1)$. Если лагранжиан взаимодействия содержит производные, то

каждая вершина, содержащая m производных, вносит дополнительный фактор m . Суммируя эти факторы, получаем

$$\omega = \sum_l (r_l + 2) - 4(n - 1) + mn. \quad (2.5)$$

Индекс ω определяет степень роста коэффициентной функции при однородном растяжении всех импульсных переменных. При $\omega \geq 0$ это определение, вообще говоря, теряет смысл, так как соответствующий интеграл расходится. В этом случае индекс диаграммы определяет условную степень роста. Из неотрицательности индекса диаграммы следует расходимость отвечающего ей интеграла. Обратное, вообще говоря, не верно, так как индекс диаграммы характеризует ее поведение лишь при одновременном растяжении всех импульсов и ничего не говорит о поведении диаграммы при стремлении к бесконечности части переменных интегрирования при фиксированных остальных. Другими словами, диаграмма с отрицательным индексом может иметь расходящиеся подграфы. Отрицательность индекса является достаточным условием сходимости примитивно расходящихся диаграмм, т. е. диаграмм, которые становятся сходящимися при разрыве любой внутренней линии. Рассмотренные в первом параграфе диаграммы являются примитивно расходящимися, в то время как диаграмма на рис. 6 имеет расходящиеся подграфы (1, 2, 3) и (2, 3, 4). Очевидно, что однопетлевые диаграммы могут быть лишь примитивно расходящимися.

Теперь мы можем сформулировать рецептуру устранения расходимостей из произвольных диаграмм путем введения контрчленов. Прежде всего введем промежуточную регуляризацию, делающую все интегралы сходящимися (например, с помощью формулы (1.3)).

Рассмотрим сначала однопетлевые диаграммы. Как мы уже видели, для того чтобы соответствующие коэффициентные функции стремились при снятии регуляризации к определенному пределу, достаточно вычесть из них несколько первых членов разложения в ряд Тейлора по внешним импульсам. Такое вычитание в свою очередь эквивалентно введению в лагранжиан контрчленов, т. е. замене исходного регуляризованного лагранжиана $\mathcal{L}_\Lambda$ на $\mathcal{L}_\Lambda + \Delta\mathcal{L}_1$.

Явное выражение для контрчленов $\Delta\mathcal{L}_1$ строится следующим образом. Пусть G_s^n сильно связная диаграмма с n вершинами и s внешними линиями A_μ , имеющая неотрицательный индекс ω . Ей отвечает симметричная собственная вершинная функция $\Gamma_s^n(x_1, \dots, x_s)$. Вычитаемый полином представляет собой первые члены разложения фурье-образа Γ_s^n в ряд Тейлора и в координатном представлении имеет вид

$$Z_{(\mu)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \delta(x_1 - x_2) \dots \delta(x_{n-1} - x_n), \quad (2.6)$$

где Z — симметричный полином степени ω . Для того чтобы получить контрчлен, отвечающий данной диаграмме, нужно умножить выражение (2.6) на произведение

$$\mathcal{A}_{\mu_1}(x_1) \dots \mathcal{A}_{\mu_s}(x_s), \quad (2.7)$$

просуммировать полученное выражение по $\mu_1 \dots \mu_s$ и проинтегрировать по всем переменным $x_1, \dots, x_n$, кроме одной. (Если помимо векторных внешних линий диаграмма содержит другие, например, спинорные и скалярные линии, то все рассуждения остаются в силе, за исключением того, что симметризация распространяется лишь на линии одного типа.)

Будем теперь строить двухпетлевые диаграммы, используя в качестве лагранжиана $\mathcal{L}_\Lambda + \Delta\mathcal{L}_1$. Построенные таким образом двухпетлевые диаграммы уже не содержат расходящихся подграфов, т. е. при снятии промежуточной регуляризации расходимость возникает только при одновременном стремлении всех переменных интегрирования к бесконечности. Этот факт вполне очевиден, если расходящиеся подграфы не перекрываются, как это имеет место, например, для диаграммы, изображенной на рис. 7.

В этом случае контрчлен $\Delta\mathcal{L}_1$, устраняющий расходимости из подграфа (2.3), имеет вид

$$- \frac{(z_2 - 1)}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2, \quad (2.8)$$

и лагранжиан $\mathcal{L} + \Delta\mathcal{L}_1$ наряду с диаграммой на рис. 7 порождает диаграмму, изображенную на рис. 8, где кре-

стиком обозначена вершина (2.8). Интеграл, соответствующий сумме диаграмм на рис. 7 и 8, расходится лишь при одновременном стремлении всех импульсов к бесконечности, и для устранения расходимости опять-таки достаточно вычесть из него первые два члена



Рис. 7.



Рис. 8

разложения в ряд Тейлора, что эквивалентно введению в лагранжиан нового контрчлена $\Delta\mathcal{L}_2$:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L}_1 + \Delta\mathcal{L}_2. \quad (2.9)$$

Доказательство аналогичного утверждения при наличии перекрывающихся расходящихся подграфов, как, например в диаграмме на рис. 6, более сложно и мы не будем его здесь приводить.

Продолжая указанную процедуру, мы придем к перенормированному лагранжиану

$$\mathcal{L}_R = \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L}_1 + \dots + \Delta\mathcal{L}_n, \quad (2.10)$$

где $\Delta\mathcal{L}_i$ — локальные полиномы по полям и их производным, для которого все диаграммы, содержащие не более n петель, сходятся при снятии промежуточной регуляризации к конечному пределу. Очевидно, что, действуя по теории возмущений, мы можем вычислить таким образом функции Грина с точностью до любого конечного порядка n . С увеличением n полное число контрчленов, разумеется, возрастает, однако число различных типов контрчленов может оказаться конечным. (Типом контрчлена мы называем его функциональную зависимость от полей.) В этом случае говорят о перенормируемости теории. Перенормируемая теория фиксируется заданием конечного числа параметров, имеющих смысл физических зарядов и масс. Если же число типов контрчленов неограниченно возрастает, т. е. в старших порядках теории возмущений появляются структуры, содержащие все большее число полей и их производных,

водных, то теория называется неперенормируемой. Поскольку введение нового контрчлена означает появление новой произвольной константы (положения точки вычитания), неперенормируемые теории не фиксируются конечным числом параметров. Для неперенормируемых лагранжианов метод теории возмущений, по-видимому, непригоден, и мы не будем их здесь рассматривать.

Явный вид контрчленов зависит от конкретной промежуточной регуляризации и от выбора точки вычитания, т. е. центра разложения в ряд Тейлора. Неудачный выбор регуляризации может сильно затруднить анализ перенормированной теории. Для калибровочных теорий особенно удобны так называемые инвариантные регуляризации, сохраняющие формальные свойства симметрии неперенормированной теории.

§ 3. Инвариантные регуляризации. Метод Паули — Вилларса

Контрчленная форма R -операции удобна для исследования полей Янга — Миллса, так как она позволяет наиболее просто и явно учесть свойства симметрии. Как мы уже видели в предыдущей главе, принцип относительности позволяет строить теорию возмущений для полей Янга — Миллса, отправляясь от различных калибровок. При этом калибровки, в которых S -матрица формально унитарна (кулоновская или гамильтонова калибровки для безмассового поля Янга — Миллса, унитарная калибровка для теории со спонтанно нарушенной симметрией) не удобны с точки зрения процедуры перенормировки. В первых двух случаях отсутствует явная релятивистская инвариантность, а в последнем явная перенормируемость. Гораздо удобнее в этом смысле явно ковариантные калибровки типа лоренцевой, для которых как мы вскоре увидим, перенормируемость очевидна. Однако в лоренцевой калибровке мы не можем построить гамильтонову формулировку теории, и потому унитарность S -матрицы не очевидна. С точки зрения операторного формализма S -матрица в лоренцевой калибровке действует в «большом» пространстве, содержащем как физические, так и нефизические состояния (продольные и временные «фотоны»,

скалярные фермионы, голдстоуновские бозоны) и, вообще говоря, унитарна лишь в этом пространстве, в котором метрика индефинитна. Унитарность S -матрицы в физическом подпространстве, состояния которого соответствуют полям материи и поперечным векторным квантам, является следствием принципа относительности, который утверждает, что все наблюдаемые не зависят от конкретного выбора калибровочного условия. Это подтверждается явными вычислениями предыдущей главы, где было показано, что явно унитарный производящий функционал для коэффициентных функций S -матрицы в кулоновской калибровке может быть тождественно преобразован в функционал, отвечающий лоренцевой калибровке. Приведенные рассуждения носили, однако, формальный характер, так как мы не обращали внимания на расходимости, появляющиеся при вычислении этих функционалов по теории возмущений. В действительности в квантовой теории принцип относительности следует применять к свободным от расходимостей перенормированным величинам. Перенесение этого принципа на перенормированную теорию не является тривиальным. Перенормировка эквивалентна переопределению исходного лагранжиана. Поэтому необходимо доказать, что перенормированный лагранжиан калибровочно-инвариантен. Тогда мы сможем применить к нему рассуждения предыдущей главы и строго доказать эквивалентность различных калибровок и, следовательно, унитарность S -матрицы. Последнее утверждение нуждается в уточнении. Как мы уже видели, явный вид перенормированного лагранжиана зависит от используемой промежуточной регуляризации. Сказанное выше относится лишь к инвариантной промежуточной регуляризации, т. е. регуляризации, сохраняющей формальные свойства симметрии перенормированной теории. Это не означает, разумеется, что для вычисления S -матрицы нельзя пользоваться неинвариантной регуляризацией. В этом случае, однако, регуляризованная теория калибровочно неинвариантна и рассуждения предыдущей главы, демонстрирующие эквивалентность различных калибровок, к ней неприменимы. Принцип относительности справедлив теперь лишь для перенормированной S -матрицы в пределе

снятой регуляризации. Все это усложняет доказательство унитарности и делает его значительно менее прозрачным. Поэтому мы начнем описание процедуры перенормировки теории Янга — Миллса с построения калибровочно-инвариантной промежуточной регуляризации. Специфика инвариантной регуляризации калибровочных теорий обусловлена взаимодействием полей Янга — Миллса в пустоте. Взаимодействие с полями материи не вносит никаких осложнений: соответствующие диаграммы регуляризуются с помощью очевидного обобщения градиентно инвариантной процедуры Паули — Вилларса.

Покажем это на примере взаимодействия поля Янга — Миллса со спинорным полем ψ , описываемого лагранжианом (I.3.1). Производящий функционал для функций Грина имеет вид

$$Z(J_\mu, \bar{\eta}, \eta) = N^{-1} \int \exp \left\{ i \left[\mathcal{L}_{YM} + \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu^a)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + i\bar{\psi} (\hat{\partial} - g\Gamma^a \hat{A}^a) \psi - \mu_0 \bar{\psi} \psi + J_\mu^a A_\mu^a + \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta \right] dx \right\} \det M \prod_x dA_\mu d\bar{\psi} d\psi. \quad (3.1)$$

Расходящиеся диаграммы, не содержащие внутренних векторных линий — спинорные циклы, регуляризуются так же, как в электродинамике, т. е. вычитанием аналогичных циклов, по которым распространяются спинорные поля с массами μ_i . Действительно, если мы интересуемся только спинорными циклами, то источники $\bar{\eta}, \eta$ можно положить равными нулю. Остающийся гауссов интеграл по ψ и $\bar{\psi}$ явно вычисляется. Он равен $\det X_0$, где

$$X_0 = i\gamma_\mu \partial_\mu - \mu_0 - ig\Gamma^a \gamma_\mu A_\mu^a. \quad (3.2)$$

Регуляризация состоит в замене $\det X_0$ произведением

$$\det X_0 \rightarrow \det X_0 \prod_{j=1}^n (\det X_j)^{c_j} = \\ = \exp \left\{ \text{Tr} \ln X_0 + \sum_{j=1}^n c_j \text{Tr} \ln X_j \right\}, \quad (3.3)$$

где операторы X_j конструируются аналогично оператору X_0

$$X_j = i\hat{\partial} - \mu_j - ig\Gamma^a \hat{A}^a, \quad (3.4)$$

а коэффициенты c_j удовлетворяют условиям

$$\sum c_j + 1 = 0, \quad \sum c_j \mu_j^2 = 0. \quad (3.5)$$

Чтобы убедиться в том, что замена (3.3) действительно регуляризует спинорные циклы, представим $\det X_j$ в виде

$$\det X_j = \det (i\hat{\partial} - \mu_j) \det \{1 - g (i\hat{\partial} - \mu_j)^{-1} i\Gamma^a \hat{A}^a\}. \quad (3.6)$$

Первый множитель не зависит от полей A_μ и поэтому может быть включен в нормировочную константу N . Второй сомножитель можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \exp \{ \text{Tr} \ln \{1 - g (i\hat{\partial} - \mu_j)^{-1} i\Gamma^a \hat{A}^a\} \} = \\ = \exp \left\{ - \left[\frac{(ig)^2}{2} \text{tr} \int \left[\Gamma^{a_1} \hat{A}^{a_1}(x_1) S^j(x_1 - x_2) \times \right. \right. \right. \\ \times \Gamma^{a_2} \hat{A}^{a_2}(x_2) S^j(x_2 - x_1) \Big] dx_1 dx_2 + \dots \\ \dots + \frac{(ig)^n}{n} \text{tr} \int \Gamma^{a_1} \hat{A}^{a_1}(x_1) S^j(x_1 - x_2) \dots \\ \dots \Gamma^{a_n} \hat{A}^{a_n}(x_n) S^j(x_n - x_1) dx_1 \dots dx_n \Big] \Big\}, \quad (3.7) \end{aligned}$$

где $S^j(x)$ — спинорная функция Грина

$$S^j(x) \equiv (i\hat{\partial} - \mu_j)^{-1} = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int \frac{\mu_j + \hat{p}}{\mu_j^2 - p^2 - i0} e^{-ipx} dp. \quad (3.8)$$

Переходя к фурье-образам, n -е слагаемое в экспоненте можно записать в виде

$$\begin{aligned} \text{const} \cdot \int \left[\int dp \frac{\text{tr} [\gamma_{v_1} (\mu_j + \hat{p}) \dots \gamma_{v_n} (\mu_j + \hat{p} + k_{n-1})]}{(\mu_j^2 - p^2)(\mu_j^2 - (p + k_1)^2) \dots (\mu_j^2 - (p + k_{n-1})^2)} \times \right. \\ \times \text{tr} [\Gamma^{a_1} A_{v_1}^{a_1}(k_1) \dots \Gamma^{a_n} A_{v_n}^{a_n}(k_n)] \times \\ \left. \times \delta(k_n - k_1 - \dots - k_{n-1}) \right] dk_1 \dots dk_n. \quad (3.9) \end{aligned}$$

Здесь первый след относится к спинорным индексам, а второй — к внутренним степеням свободы. При $n \leq 4$ интеграл по p расходится. При больших p подынте-

гральное выражение в этом интеграле можно представить в виде ряда по μ_j

$$\frac{P_n(p) + \mu_j^2 P_{n-2}(p) + \dots + \mu_j^n}{P_{2n}(p) + \mu_j^2 P_{2n-2}(p) + \dots + \mu_j^{2n}} = \frac{P_n(p)}{P_{2n}(p)} + \frac{P_n(p)}{P_{2n}(p)} \times \\ \times \left[\frac{P_{n-2}(p)}{P_n(p)} - \frac{P_{2n-2}(p)}{P_{2n}(p)} \right] \mu_j^2 + \dots, \quad (3.10)$$

где $P_j(p)$ — полином по p степени j . Коэффициент при μ_j^{2k} при больших p ведет себя как p^{-n-2k} . Если коэффициенты c_j удовлетворяют условиям (3.5), то два старших члена в асимптотическом разложении по p подынтегрального выражения в сумме (3.3) выпадают, и асимптотика регуляризованного выражения есть p^{-n-4} . Таким образом, все интегралы по p сходятся.

Регуляризованный производящий функционал можно представить в виде континуального интеграла, в котором в показателе экспоненты стоит локальное действие, если воспользоваться представлением $\det X_j$ в виде

$$[\det X_j]^{\pm 1} = \\ = \int \exp \left\{ i \int [i \bar{\psi}_j (\hat{\partial} - g \Gamma^a \hat{A}^a) \psi_j - \mu_j \bar{\psi}_j \psi_j] dx \right\} \prod_x d\bar{\psi}_j d\psi_j, \quad (3.11)$$

где $\bar{\psi}_j, \psi_j$ — вспомогательные спинорные переменные. Показатель степени в левой части этого равенства определяется коммутационными свойствами полей ψ_j . Антикоммутирующим переменным соответствует показатель $+1$, коммутирующим -1 . Выбирая в качестве коэффициентов c_j , фигурирующих в формуле (3.3) целые числа,

регуляризующий множитель $\prod_{j=1}^n (\det X_j)^{c_j}$ можно представить в виде

$$\prod_{j=1}^n (\det X_j)^{c_j} = \int \exp \left\{ i \int \sum_{j=1}^n \left[\sum_{k=1}^{|c_j|} [i \bar{\psi}_{jk} (\hat{\partial} - g \Gamma^a \hat{A}^a) \psi_{jk} - \right. \right. \\ \left. \left. - \mu_j \bar{\psi}_{jk} \psi_{jk}] \right] dx \prod_{x, j, k} d\bar{\psi}_{jk} d\psi_{jk} \right\}. \quad (3.12)$$

Здесь коэффициенты c_j и массы μ_j считаются удовлетворяющими условиям (3.5). При этом отрицательным коэффициентам c_j соответствуют коммутирующие вспомогательные поля $\bar{\psi}_{jk}$, ψ_{jk} , а положительным коэффициентам c_j — антикоммутирующие вспомогательные поля.

Добавляя к действию, стоящему в показателе экспоненты (3.1), действие, фигурирующее в правой части равенства (3.12), мы получим регуляризованный производящий функционал в виде континуального интеграла от $\exp \{i \times \text{локальное действие}\}$. Действие (3.12) явно инвариантно относительно одновременных калибровочных преобразований полей $\mathcal{A}_\mu$, $\bar{\psi}_{jk}$, ψ_{jk} , и следовательно, регуляризация (3.3) не меняет свойства симметрии производящего функционала.

Обобщение этой процедуры на случай, когда поле Янга — Миллса взаимодействует еще со скалярными полями, очевидно. Единственное отличие состоит в том, что поскольку скалярные поля являются коммутирующими переменными, сумма замкнутых циклов равна $(\det Y_0)^{-1}$ и регуляризация состоит в замене

$$(\det Y_0)^{-1} \rightarrow (\det Y_0)^{-1} \prod_j (\det Y_j)^{-c_j}. \quad (3.13)$$

Регуляризация Паули — Вилларса применима в тех случаях, когда лагранжиан взаимодействия квадратичен по полям, образующим расходящиеся циклы. Поэтому она не обобщается на само поле Янга — Миллса. Здесь приходится прибегать к более изощренным приемам. В дальнейшем ограничимся рассмотрением поля Янга — Миллса в пустоте.

В настоящее время существуют два метода инвариантной регуляризации неабелевых калибровочных теорий: метод высших ковариантных производных и метод размерной регуляризации.

Первый метод является, по сути дела, инвариантным обобщением стандартной процедуры регуляризации, при которой свободные пропагаторы регуляризуются путем вычитания

$$-\frac{1}{k^2} \rightarrow -\frac{1}{k^2} - \frac{1}{\Lambda^2 - k^2} = -\frac{1}{k^2 - \Lambda^{-2}k^4} \quad (3.14)$$

(для простоты выписан скалярный пропагатор).

Такое вычитание эквивалентно введению в лагранжиан членов, содержащих высшие производные

$$\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi \rightarrow \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi + \frac{1}{2\Lambda^2} \square \varphi \square \varphi. \quad (3.15)$$

В случае поля Янга — Миллса подобная процедура нарушает калибровочную инвариантность, так как обычная производная не является ковариантным объектом. Естественное обобщение регуляризации (3.15) состоит в добавлении к лагранжиану Янга — Миллса члена, содержащего высшие ковариантные производные, например,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{YM} \rightarrow \mathcal{L}_{YM}^\Lambda &= \frac{1}{8} \text{tr} \left\{ \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{\Lambda^2} \nabla_\alpha \mathcal{F}_{\mu\nu} \nabla_\alpha \mathcal{F}_{\mu\nu} \right\} = \\ &= \frac{1}{8} \text{tr} \left\{ \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{\Lambda^2} (\partial_\alpha \mathcal{F}_{\mu\nu} - g [\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{F}_{\mu\nu}])^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Замена (3.16) приводит к желаемой модификации свободного пропагатора, однако, в качестве платы за инвариантность в лагранжиане взаимодействия появляются новые вершины. Ниже мы обсудим эту регуляризацию более подробно, а сейчас заметим лишь, что из-за появления новых вершин с производными регуляризация является лишь частичной — в регуляризованной теории остаются расходящиеся диаграммы второго, третьего и четвертого порядков. Таким образом, сам по себе метод высших производных не решает проблему полностью, а лишь сводит задачу к исследованию суперперенормируемой теории, т. е. теории, порождающей конечное число расходящихся диаграмм. Ниже будет показано, что остающиеся диаграммы можно регуляризовать с помощью несколько видоизмененной процедуры Паули — Вилларса. В результате мы опишем явно инвариантный лагранжиан, который порождает сходящиеся (при конечных параметрах регуляризации) диаграммы Фейнмана. Недостатком этого метода является его сравнительная громоздкость. Из-за появления в лагранжиане взаимодействия новых вершин, количество диаграмм сильно возрастает, что затрудняет практические вычисления. Однако для исследования принципиальных вопросов унитарности и перенормируемости этот метод

наиболее удобен, поскольку наличие явно инвариантного выражения для регуляризованного действия позволяет автоматически перенести на регуляризованный случай рассуждения предыдущей главы относительно эквивалентности различных калибровок и тем самым доказать унитарность перенормированной теории.

В отличие от метода высших ковариантных производных, размерная регуляризация не сводится к какой-либо модификации исходного лагранжиана, а оперирует непосредственно с диаграммами Фейнмана. Этот метод основан на двух наблюдениях:

1. Формальные соотношения симметрии между функциями Грина (обобщенные тождества Уорда) не зависят от числа измерений пространства — времени (n).
2. При достаточно малом или комплексном n все диаграммы отвечают сходящимся интегралом.

Таким образом, обобщенные тождества Уорда можно строго доказать в той области n , где все интегралы сходятся, а затем путем аналитического продолжения перейти к $n = 4$.

Метод размерной регуляризации оказался удобным для вычисления конкретных диаграмм, и довольно широко используется в практических вычислениях. Однако с точки зрения исследования принципиальных вопросов он обладает некоторыми недостатками.

Поскольку при нецелом или комплексном n регуляризованной теории нельзя сопоставить никакого лагранжиана, простое доказательство унитарности, использующее замены переменных в континуальном интеграле в этом случае неприменимо и необходимо работать непосредственно с диаграммами Фейнмана, что значительно более трудоемко. Дополнительные сложности возникают при регуляризации теорий, включающих фермионы. Поскольку алгебра γ -матриц существенно зависит от числа измерений пространства, такие теории нуждаются в специальном рассмотрении.

Таким образом, метод высших ковариантных производных и метод размерной регуляризации в известном смысле дополняют друг друга; первый метод наиболее удобен для общих доказательств, в которых ис-

пользуется, по сути дела, лишь существование инвариантного регуляризованного действия, в то время как второй метод более эффективен для расчета конкретных процессов.

§ 4. Метод высших ковариантных производных

Регуляризация будет состоять из двух этапов: вначале мы путем введения в лагранжиан высших ковариантных производных перейдем к суперперенормируемой теории, в которой расходится лишь конечное число однопетлевых диаграмм, а затем регуляризуем однопетлевые диаграммы с помощью видоизмененной процедуры Паули — Вилларса.

Модификация лагранжиана (3.16) недостаточна для того, чтобы обеспечить сходимость всех диаграмм, содержащих более одной петли. Лагранжиан (3.16) хотя и отвечает суперперенормируемой теории, но порождает расходящуюся двухпетлевую диаграмму собственной энергии четвертого порядка. Чтобы устранить и эту расходимость, мы введем в лагранжиан член, содержащий ковариантные производные четвертого порядка

$$\mathcal{L}_{YM} \rightarrow \mathcal{L}_\Lambda = \frac{1}{8} \text{tr} \left\{ \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{\Lambda^4} \nabla^2 \mathcal{F}_{\mu\nu} \nabla^2 \mathcal{F}_{\mu\nu} \right\}. \quad (4.1)$$

Калибровочная инвариантность регуляризованного лагранжиана очевидна.

Регуляризованный производящий функционал для функций Грина имеет вид

$$Z_\Lambda(J_\mu) = N^{-1} \int \exp \left\{ i \int \left[\mathcal{L}_\Lambda(x) + \frac{1}{2\alpha} \{f(\square) \partial_\mu A_\mu^a\}^2 + J_\mu^a A_\mu^a \right] dx \right\} \det M \prod_x d\mathcal{A}, \quad (4.2)$$

где $f(\square)$ — произвольная функция от оператора д'Аламбера, определяющая конкретный вид обобщенной α -калибровки. Регуляризованный свободный пропагатор поля Янга — Миллса строится обычным образом

$$D_{\mu\nu}^{ab} = \delta^{ab} \left[- \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{1}{k^2 + \Lambda^{-4} k^6} - \frac{\alpha k_\mu k_\nu}{k^4 f^2(-k^2)} \right]. \quad (4.3)$$

В лоренцевой калибровке ($\alpha = 0$) пропагатор ведет себя при больших k как k^{-6} . Если $\alpha \neq 0$, то мы будем выбирать функцию $f(-k^2)$ таким образом, чтобы она не ухудшала асимптотического поведения пропагатора при $k \rightarrow \infty$ и $k \rightarrow 0$, например,

$$f(-k^2) = k^2 - \kappa^2, \quad (4.4)$$

где κ^2 — произвольный параметр.

Расписывая явно член $\sim \Lambda^{-4}$ в лагранжиане (4.1)

$$\begin{aligned} \frac{\text{tr}}{8\Lambda^4} \{ [\square (\partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu)]^2 - \\ - 2 [\square (\partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu)] \partial_\alpha [\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{F}_{\mu\nu}] + \dots \\ \dots + [\mathcal{A}_\beta [\mathcal{A}_\alpha [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]]] \}^2, \end{aligned} \quad (4.5)$$

видим, что он порождает вершины с тремя, четырьмя, пятью, шестью, семью и восемью выходящими линиями. Максимальное число производных в каждой из этих вершин равно 5, 4, 3, 2, 1, 0 соответственно. Вычислим теперь индекс произвольной диаграммы. Принимая во внимание, что в нашем случае $r_l = -4$, получаем, что индекс диаграммы, содержащей n_k вершин с k выходящими линиями, L_{in} внутренних и L_{ex} внешних линий, определяется формулой

$$\begin{aligned} \omega \leq 4 + n_3 - n_5 - 2n_6 - 3n_7 - 4n_8 - 2L_{in} = \\ = 6 - 2\Pi - n_3 - 2n_4 - 3n_5 - 4n_6 - 5n_7 - 6n_8, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где Π — число замкнутых петель.

Нетрудно видеть, что расходиться могут только интегралы, соответствующие однопетлевым диаграммам второго порядка с двумя внешними линиями, третьего порядка с тремя внешними линиями и четвертого порядка с четырьмя внешними линиями. Аналогичные расходящиеся диаграммы порождаются также определителем $\det M$. Всем прочим диаграммам, включая однопетлевые диаграммы с внешними линиями, отвечающими фиктивным s -частицам, соответствуют сходящиеся интегралы.

Для регуляризации однопетлевых диаграмм естественно попытаться использовать процедуру Паули — Вилларса. Очевидно, достаточно регуляризовать сильно связанные однопетлевые диаграммы.

Суммарный вклад замкнутых циклов с внешними линиями A_μ можно представить в виде

$$Z_0 = N^{-1} \int \exp \left\{ i \int \left[\frac{1}{2} \frac{\delta^2 S_\Lambda}{\delta A_\mu^a(x) \delta A_\nu^b(y)} q_\mu^a(x) q_\nu^b(y) \right] dx dy + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\alpha} \int \{f(\square) \partial_\mu q_\mu^a(x)\}^2 dx \right\} \det M(A) \prod_x dq_\mu. \quad (4.7)$$

Помимо сильно связанных диаграмм разложение функционала (4.7) содержит также их произведения, т. е. несвязные диаграммы. Последние, очевидно, автоматически будут конечны, если мы регуляризуем их связанные компоненты.

Мы использовали здесь в качестве аргумента поля A_μ , а не источники J_μ , имея в виду, что порождаемые функционалом Z_0 однопетлевые диаграммы могут входить в качестве подграфов в более сложные диаграммы, т. е. будут интегрироваться по A_μ с некоторым весом.

Разложение $Z_0(A)$ в ряд теории возмущений, очевидно, порождает замкнутые циклы, по которым распространяются векторные (q_μ) и скалярные (c) частицы нулевой массы. По аналогии с тем, как это было сделано для циклов полей материи, можно было бы регуляризовать $Z_0(A)$ вычитанием аналогичных циклов, по которым распространяются векторные и скалярные частицы с массами μ_j . Однако такое вычитание нарушило бы калибровочную инвариантность. В отличие от производящего функционала для однопетлевых диаграмм полей материи, который инвариантен относительно калибровочных преобразований своих аргументов, функционал $Z_0(A_\mu)$ не обладает этим свойством. Это обусловлено присутствием в нем фиксирующего калибровку члена и циклов фиктивных частиц, нарушающих явную калибровочную инвариантность. Тем не менее, как мы сейчас покажем, расходящаяся часть функционала $Z_0(A)$ инвариантна относительно калибровочных преобразований полей A_μ . С точностью до конечных, не нуждающихся в регуляризации членов, функционал (4.7) может быть преобразован к явно инвариантному

виду

$$Z_0 = N^{-1} \int \exp \left\{ i \int \left[\frac{1}{2} \frac{\delta^2 S_\Lambda}{\delta A_\mu^a(x) \delta A_\nu^b(y)} q_\mu^a(x) q_\nu^b(y) \right] dx dy \right\} \times \\ \times \det \nabla_\mu^2 \prod_x \delta(\nabla_\mu q_\mu) dq_\mu + \dots, \quad (4.8)$$

где

$$\nabla_\mu q_\mu = \partial_\mu q_\mu - g[\mathcal{A}_\mu, q_\mu], \quad (4.9)$$

а ... обозначает конечные члены, не нуждающиеся в регуляризации.

Чтобы продемонстрировать это, воспользуемся уже известным нам приемом. Введем функционалы $\Delta_V(\mathcal{A}_\mu, q_\mu)$ и $\Delta_W(\mathcal{A}_\mu, q_\mu)$, определенные условиями

$$\Delta_V(\mathcal{A}_\mu, q_\mu) \int \prod_x \delta(\nabla_\mu q_\mu^\omega) d\omega = 1, \quad (4.10)$$

$$\Delta_W(\mathcal{A}_\mu, q_\mu) \int \prod_x \delta(\partial_\mu q_\mu^\omega - W(x)) d\omega = 1, \quad (4.11)$$

где калибровочное преобразование $q_\mu \rightarrow q_\mu^\omega$ представляет собой сдвиг на функцию, зависящую от $\mathcal{A}_\mu$, ω

$$q_\mu^\omega = q_\mu + \frac{1}{\varepsilon} \{ \mathcal{A}_\mu^\omega - \mathcal{A}_\mu \} = \\ = q_\mu + \frac{1}{\varepsilon} \{ \partial_\mu u - g[\mathcal{A}_\mu, u] + O(u^2) \}, \quad (4.12)$$

где ε — малый параметр.

Интегрирование в формулах (4.10), (4.11) ведется по инвариантной мере на группе Ω . Функционалы Δ_V , Δ_W , очевидно, инвариантны относительно преобразований (4.12).

Используя те же аргументы, что и в главе III, видим, что на поверхности $\nabla_\mu q_\mu = 0$ функционал Δ_V равен

$$\Delta_V(\mathcal{A}_\mu, q_\mu) |_{\nabla_\mu q_\mu = 0} = \det \varepsilon^{-1} \nabla_\mu^2 = \\ = \det [\{ \square - g \partial_\mu [\mathcal{A}_\mu,] - g[\mathcal{A}_\mu, \partial_\mu] + g^2[\mathcal{A}_\mu, [\mathcal{A}_\mu,]] \}] \cdot \varepsilon^{-1}, \quad (4.13)$$

а функционал Δ_W на поверхности $\partial_\mu q_\mu = W$ равен

$$\Delta_W(\mathcal{A}_\mu, q_\mu) |_{\partial_\mu q_\mu = W} = \det \varepsilon^{-1} \{ \square - g \partial_\mu [\mathcal{A}_\mu,] \} = \det \varepsilon^{-1} M. \quad (4.14)$$

Постоянные множители $\det \varepsilon^{-1}$ приводят лишь к перенормировке постоянной N , и поэтому в дальнейшем мы будем их опускать.

Имея в виду (4.10) и (4.14), перепишем функционал Z_0 в виде

$$\begin{aligned} Z_0(A) = N^{-1} \int \exp \left\{ i \int \left[\frac{1}{2} \frac{\delta^2 S_\Lambda}{\delta A_\mu^a(x) \delta A_\nu^b(y)} q_\mu^a(x) q_\nu^b(y) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2\alpha} \{f(\square) W(x)\}^2 \delta(x-y) \right] dx dy \right\} \times \\ \times \prod_x \delta(\partial_\mu q_\mu - W) \Delta_W(\mathcal{A}_\mu, q_\mu) \delta(\nabla_\mu q_\mu^\omega) \times \\ \times \Delta_V(\mathcal{A}_\mu, q_\mu) d\omega dW dq_\mu. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Переходя к новым переменным

$$q_\mu \rightarrow q_\mu^{\omega^{-1}}, \quad \omega^{-1} \rightarrow \omega \quad (4.16)$$

имеем

$$\begin{aligned} Z_0(A) = N^{-1} \int \exp \left\{ i \int \left[\frac{1}{2} \frac{\delta^2 S_\Lambda}{\delta A_\mu^a(x) \delta A_\nu^b(y)} [q_\mu^\omega(x)]^a [q_\nu^\omega(y)]^b + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2\alpha} \{f(\square) W(x)\}^2 \delta(x-y) \right] dx dy \right\} \prod_x \delta(\partial_\mu q_\mu^\omega - W) \times \\ \times \Delta_W \delta(\nabla_\mu q_\mu) \det \nabla_\mu^2 d\omega dW dq_\mu. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Интегрирование по ω снимается δ -функцией $\delta(\partial_\mu q_\mu^\omega - W)$. Возникающий при этом якобиан сокращается с Δ_W , и ω выражается через q_μ , W уравнением

$$\partial_\mu (\partial_\mu u - g[\mathcal{A}_\mu, u] + O(u^2)) = \varepsilon (W - \partial_\mu q_\mu). \quad (4.18)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$u = \varepsilon M^{-1} (W - \partial_\mu q_\mu) + O(\varepsilon^2). \quad (4.19)$$

Подставляя это решение в формулу (4.17), получаем

$$\begin{aligned} Z_0(\mathcal{A}) = N^{-1} \int \exp \left\{ i \int \left[\frac{1}{2} \frac{\delta^2 S_\Lambda}{\delta A_\mu^a(x) \delta A_\nu^b(y)} \times \right. \right. \\ \times [q_\mu + \nabla_\mu M^{-1} (W - \partial_\rho q_\rho)]^a [q_\nu + \nabla_\nu M^{-1} (W - \partial_\rho q_\rho)]^b + \\ \left. \left. + \frac{1}{2\alpha} \{f(\square) W(x)\}^2 \delta(x-y) \right] dx dy \right\} \times \\ \times \det \nabla_\mu^2 \prod_x \delta(\nabla_\mu q_\mu) dW dq_\mu + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Поскольку функционал $Z_0(\mathcal{A})$ в действительности не зависит от ε можно положить в формуле (4.20) $\varepsilon = 0$, в результате чего последний член исчезнет.

Выражение (4.20) отличается от (4.8) лишь заменой q_μ в показателе экспоненты на

$$q_\mu + \nabla_\mu M^{-1} (W - \partial_\rho q_\rho). \quad (4.21)$$

Покажем, что возникающие в результате этого дополнительные диаграммы отвечают сходящимся интегралам. Для этого воспользуемся соотношением

$$\int \frac{\delta^2 S_\Lambda}{\delta A_\mu^a(x) \delta A_\nu^b(y)} [\nabla_\mu \varphi(x)]^a dx = g t^{abc} \frac{\delta S_\Lambda}{\delta A_\nu^c(y)} \varphi^c(y), \quad (4.22)$$

следующим из калибровочной инвариантности действия S_Λ . Это соотношение позволяет переписать показатель экспоненты в формуле (4.20) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int \frac{\delta^2 S_\Lambda}{\delta A_\mu^a(x) \delta A_\nu^b(y)} q_\mu^a(x) q_\nu^b(y) dx dy + g t^{abc} \int \frac{\delta S_\Lambda}{\delta A_\nu^c(x)} \times \\ & \times \left[q_\nu + \frac{1}{2} \nabla_\nu M^{-1} (W - \partial_\rho q_\rho) \right]^b [M^{-1} (W - \partial_\rho q_\rho)]^c dx. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Легко видеть, что второй член в (4.23) порождает лишь сходящиеся диаграммы. Действительно, пропагатор q_μ при больших q ведет себя как q^{-6} , пропагатор W убывает не медленнее. Поэтому вставка вершин, порождаемых вторым членом в (4.23), в любую диаграмму делает ее конечной. В частности, на массовой поверхности вклад этого члена вообще равен нулю.

Итак, мы показали, что расходящаяся часть функционала (4.7), которую мы будем обозначать через $Z'_0(\mathcal{A})$, может быть преобразована к виду (4.8). Убедимся в калибровочной инвариантности этого выражения.

Для этого заметим, что, выполняя интегрирование по q_μ , $Z'_0(A)$ можно записать в виде

$$Z'_0(A) = \det Q_0^{-1/2} \det \nabla_\mu^2, \quad (4.24)$$

где

$$\det Q_0^{-1/2} = \int \exp \left\{ i \int \left[\frac{1}{2} \frac{\delta^2 S_\Lambda}{\delta A_\mu^a(x) \delta A_\nu^b(y)} q_\mu^a(x) q_\nu^b(y) \right] dx dy \right\} \times \\ \times \prod_x \delta(\nabla_\mu q_\mu) dq_\mu. \quad (4.25)$$

Функционал $\det \nabla_\mu^2$ явным образом калибровочно-инвариантен. При калибровочных преобразованиях полей $\mathcal{A}_\mu$ производные $\frac{\delta^2 S_\Lambda}{\delta A_\mu^a(x) \delta A_\nu^b(y)}$ преобразуются контраградиентно. Из инвариантности S_Λ следует

$$\frac{\delta^2 S_\Lambda}{\delta A_\mu^a(x) \delta A_\nu^b(y)} = \frac{\delta^2 S_\Lambda'}{\delta A_\mu'^c(x) \delta A_\nu'^d(y)} \times \\ \times (\delta^{ac} \delta^{bd} - g t^{caf} u^f(x) \delta^{bd} - g t^{bdf} u^f(y) \delta^{ac} + \dots). \quad (4.26)$$

Поэтому если одновременно с калибровочным преобразованием $\mathcal{A}_\mu \rightarrow \mathcal{A}_\mu^\omega$ сделать замену переменных интегрирования

$$q_\mu \rightarrow \omega q_\mu \omega^{-1}, \quad (4.27)$$

то интеграл (4.25) не изменится. Таким образом, окончательно

$$Z'_0(\mathcal{A}^\omega) = Z'_0(\mathcal{A}). \quad (4.28)$$

Регуляризация состоит в замене

$$Z'_0(A) \rightarrow \det Q_0^{-1/2} \prod_j \det Q_j^{-\frac{c_j}{2}} \det B_0 \det B_j^{c_j}, \quad (4.29)$$

где

$$\det B_j = \det \{\nabla_\mu^2 - \mu_j^2\} = \\ = \int \exp \left\{ -\frac{i}{2} \text{tr} \int [\bar{b} \nabla_\mu^2 b - \mu_j^2 \bar{b} b] dx \right\} \prod_x d\bar{b} db, \quad (4.30)$$

$$\det Q_j^{-1/2} = \int \exp \left\{ i \int \left[\frac{1}{2} \int \frac{\delta^2 S_\Lambda}{\delta A_\mu^a(x) \delta A_\nu^b(y)} q_\mu^a(x) q_\nu^b(y) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\mu_j^2}{2} q_\mu^2(x) \delta(x-y) \right] dx dy \right\} \prod_x \delta(\nabla_\mu q_\mu) dq_\mu. \quad (4.31)$$

Переменные b и $\bar{b}$ считаются антикоммутирующими, коэффициенты c_j удовлетворяют условиям Паули — Вилларса:

$$\sum c_j + 1 = 0; \quad \sum c_j \mu_j^2 = 0, \quad (4.32)$$

$$B_0 = B_j \quad \text{при} \quad \mu_j = 0, \quad Q_0 = Q_j \quad \text{при} \quad \mu_j = 0.$$

Формула (4.29) описывает обычную регуляризацию Паули — Вилларса, которую мы подробно обсуждали выше на примере спинорных полей. Из каждого замкнутого цикла, по которому распространяется векторная (q_μ) или скалярная (b) частица, вычитаются аналогичные циклы, в которых внутренние линии имеют массы μ_j . Благодаря условиям (4.32) ведущие члены в асимптотике подынтегральных выражений сокращаются, и интегралы становятся сходящимися. Поскольку $Z_0(\mathcal{A})$ отличается от $Z'_0(\mathcal{A})$ лишь конечными членами, подобная процедура очевидно регуляризует и $Z_0(\mathcal{A})$.

Множители $\det Q_j$ и $\det B_j$ калибровочно-инвариантны. Инвариантность $\det B_j$ непосредственно следует из интегрального представления (4.30). Эффективное действие, стоящее в показателе экспоненты, описывает калибровочно-инвариантное взаимодействие скалярных полей $\bar{b}, b$ с полем Янга — Миллса. Поэтому

$$\det B_j(\mathcal{A}^\omega) = \det B_j(\mathcal{A}). \quad (4.33)$$

Инвариантность функционала $\det Q_j$ доказывается точно так же, как инвариантность функционала $\det Q_0$. Таким образом, регуляризация (4.29) действительно является калибровочно-инвариантной.

Теперь мы можем записать явное выражение для полностью регуляризованного производящего функционала для функций Грина. Он имеет вид

$$Z_\Lambda(J_\mu) = N^{-1} \int \exp \left\{ i \int \text{tr} \left[\frac{1}{8} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{8\Lambda^4} \nabla^2 \mathcal{F}_{\mu\nu} \nabla^2 \mathcal{F}_{\mu\nu} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{4\alpha} [f(\square) \partial_\mu \mathcal{A}_\mu]^2 - \frac{1}{2} \mathcal{J}_\mu \mathcal{A}_\mu \right] dx \right\} \times \\ \times \det M \prod_j \det Q_j^{-\frac{c_j}{2}} \det B_j^{c_j} \prod_x d\mathcal{A}_\mu. \quad (4.34)$$

С помощью интегральных представлений (4.30), (4.31), (3.3.51), это выражение можно представить в виде континуального интеграла от $\exp \{i \times \text{локальное действие}\}$ по Янг — Миллсовским полям $\mathcal{A}_\mu$ и вспомогательным полям $\bar{c}, c, q_\mu, \bar{b}, b$.

Можно было бы также перейти в формуле (4.34) и обобщенной ковариантной калибровке, например, вводя фиксирующий калибровку член

$$\frac{1}{2\alpha} (\nabla^2 q_\mu^a)^2. \quad (4.35)$$

При этом нужно соответственно модифицировать определители $\det B_0$ и $\det B_j$. Мы не будем здесь этим заниматься.

При конечных Λ, μ_j все диаграммы, порождаемые Z_Λ сходятся. В то же время Z_Λ имеет те же трансформационные свойства, которыми формально обладает нерегуляризованный функционал. В частности, для него справедливы, как мы увидим, обобщенные тождества Уорда.

§ 5. Размерная регуляризация

Индекс расходимости ω существенно зависит от размерности пространства-времени. Для пространства размерности n произведение независимых дифференциалов вносит в индекс диаграммы вклад, равный

$$n(L - m + 1), \quad (5.1)$$

где L — число внутренних линий, а m — число вершин. Поэтому диаграммы, которым в четырехмерном пространстве соответствовали расходящиеся интегралы, в пространстве меньшей размерности могут оказаться сходящимися. С другой стороны, переход от четырехмерного пространства к пространству размерности n никак не отражается на свойствах симметрии. Калибровочные преобразования естественным образом обобщаются на пространство любой целой положительной размерности. Можно пойти дальше и определить фейнмановские диаграммы для пространства нецелой и даже комплексной размерности. В этом случае, разумеется, уже нельзя говорить о какой-либо симметрии лагранжиана, поскольку само это понятие при нецелом n теряет смысл. Тем не

менее, мы можем исследовать функции Грина в пространстве произвольной размерности. Как мы покажем в дальнейшем, калибровочная инвариантность теории на языке функций Грина эквивалентна существованию соотношений между этими функциями, называемых обобщенными тождествами Уорда. Эти соотношения имеют смысл в пространстве любой размерности и в той области n , где все интегралы сходятся, могут быть строго доказаны. Функции Грина, рассматриваемые как функции размерности пространства n , имеют полюсные особенности при $n = 4$. Вычитая эти особенности, мы можем аналитически продолжить функции Грина в точку $n = 4$. Полученные таким образом функции будут удовлетворять обобщенным тождествам Уорда.

В качестве простейшего примера рассмотрим интеграл

$$I = \int d^n k \frac{1}{(k^2 - m^2 + i0) [(p - k)^2 - m^2 + i0]}. \quad (5.2)$$

При целом $n < 4$ этот интеграл сходится. Воспользовавшись формулой

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[ax + b(1-x)]^2}, \quad (5.3)$$

его можно переписать в виде

$$I = \int_0^1 dx \int d^n k \frac{1}{[k^2 + p^2 x(1-x) - m^2 + i0]^2}. \quad (5.4)$$

Поворачивая контур интегрирования на 90° и переходя к переменным $k_0 \rightarrow ik_0$, приходим к интегралу по евклидову пространству размерности n :

$$I = i \int_0^1 dx \int d^n k \frac{1}{[k^2 + m^2 - p^2 x(1-x)]^2}. \quad (5.5)$$

Интеграл по k легко вычисляется с помощью известной формулы

$$\int \frac{d^n k}{(k^2 + c)^\alpha} = \frac{\pi^{n/2} c^{\frac{n}{2} - \alpha} \Gamma\left(\alpha - \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (5.6)$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера. Правая часть равенства (5.6) может быть аналитически продолжена на комплексные значения n . Мы примем формулу (5.6) в качестве определения интеграла, стоящего в левой части при произвольной размерности пространства. Таким образом, интеграл (5.2) равен

$$I = i\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \int_0^1 dx [m^2 - p^2 x(1-x)]^{\frac{n}{2}-2}. \quad (5.7)$$

При $n = 4$ Γ -функция имеет полюс и I обращается в бесконечность. Это соответствует расходимости исходного интеграла по четырехмерному пространству. Как обычно, расходимость устраняется с помощью вычитательной процедуры. Разлагая I в ряд Лорана вблизи точки $n/2 = 2$, имеем

$$I = \frac{i\pi^2}{\frac{n}{2} - 2} - \gamma + i\pi^2 \int_0^1 dx \ln [m^2 - p^2(1-x)x] + O\left(\frac{n}{2} - 2\right). \quad (5.8)$$

где γ — конечная постоянная. Делая вычитание в точке $\lambda^2 = p^2$, получаем окончательный ответ в виде

$$\bar{I}(p^2, \lambda^2) = i\pi^2 \int_0^1 dx \ln \frac{m^2 - p^2 x(1-x)}{m^2 - \lambda^2 x(1-x)}. \quad (5.9)$$

Для вычисления фейнмановских диаграмм общего вида необходимо сформулировать также правила обращения с тензорными величинами в пространстве размерности n . По определению,

$$g_{\mu\nu} p_\nu = p_\mu; \quad p_\mu p_\mu = p^2; \quad g_{\mu\nu} g_{\nu\alpha} = \delta_{\mu\alpha}; \quad g_{\mu\nu} g_{\mu\nu} = n. \quad (5.10)$$

Аналогичным образом для теорий с участием фермионов вводятся объекты, обладающие алгебраическими свойствами γ -матриц

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} I, \quad (5.11)$$

где I — единичная матрица,

$$\text{tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\nu \} = 2^{\frac{n}{2}} g_{\mu\nu}, \quad (5.12)$$

$$\gamma_\mu \hat{p} \gamma_\mu = 2 \left(1 - \frac{n}{2} \right) \hat{p}, \quad \gamma_\mu \hat{p} \hat{q} \gamma_\mu = 4pq + (n - 4) \hat{p} \hat{q}. \quad (5.13)$$

Заметим, однако, что обычное определение матрицы γ_5

$$\gamma_5 = \frac{1}{4!} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu \quad (5.14)$$

не переносится на пространство произвольной размерности, поскольку абсолютно антисимметричный тензор $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ определен только в четырехмерном пространстве. Вследствие этого теории, в которых участвует матрица γ_5 , нуждаются в специальном рассмотрении и, вообще говоря, размерная регуляризация к ним неприменима.

Рецептура размерной регуляризации произвольной диаграммы Фейнмана состоит в следующем. В интеграле, соответствующем этой диаграмме,

$$F = \prod_{j=1}^I \int d^n k_j (k_{l_1})_\lambda (k_{l_2})_\mu \cdots (k_{l_n})_\nu \prod_{i=1}^L (q_i^2 - m_i^2 + i0), \quad (5.15)$$

где L — число внутренних линий диаграммы, I — число независимых циклов, а импульсы q_i представляют собой алгебраические суммы переменных интегрирования k_i и внешних импульсов p_i , нужно воспользоваться какой-либо параметризацией функций Грина, позволяющей явно выполнить интегрирование по k_i . Для этого можно использовать либо фейнмановскую параметризацию (5.3), либо так называемое α -представление

$$(p^2 - m^2 + i0)^{-1} = (i)^{-1} \int_0^\infty d\alpha \exp \{ i\alpha (p^2 - m^2 + i0) \}. \quad (5.16)$$

После перехода к α -представлению интегралы по k становятся гауссовыми и вычисляются с помощью формул

типа

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \exp(-xk^2 + 2ka) = \left(\frac{\pi}{x}\right)^{\frac{n}{2}} (2\pi)^{-n} \exp\left\{\frac{a^2}{x}\right\}; \quad (5.17)$$

при нецелом n формула (5.17) принимается за определение интеграла по n -мерному пространству.

Интеграл, определяющий функцию F , сходится в конечной области комплексной переменной n . При $n = 4$ эта функция имеет полюсы. (Практически эти полюсы появляются, например, как особенности Γ -функций Эйлера, возникающих в результате интегрирования по параметрам α .)

Выделяя с помощью комбинаторных формул (5.10) тензорные структуры, функции F можно представить в виде суммы скалярных функций F_i . Если соответствующая диаграмма не имеет расходящихся подграфов, то разложение функций F_i в ряд Лорана вблизи точки $n = 4$ имеет вид

$$F_i(p) = \frac{A(p_i^2, p_i p_j)}{n - 4} + B(p_i^2, p_i p_j) + O(n - 4), \quad (5.18)$$

где $A(p_i^2, p_i p_j)$ — полином, степень которого равна индексу диаграммы.

Вычитая из функции $F_j(p)$ несколько первых членов разложения в ряд Тейлора по импульсам p_j , мы получаем функцию, допускающую аналитическое продолжение в точку $n = 4$.

Для диаграмм, содержащих расходящиеся подграфы, вычитания делаются рекуррентно. Вводятся контрчлены, устраняющие расходимость из подграфов, а затем делается вычитание для диаграммы в целом. Важным свойством размерной регуляризации является возможность сдвига переменных интегрирования в регуляризованных интегралах. Именно это свойство в сочетании с тензорной алгеброй (5.10) позволяет доказать в рамках размерной регуляризации обобщенные тождества Уорда.

В заключение мы проиллюстрируем метод размерной регуляризации простым примером — вычислением поправки второго порядка к функции Грина поля Янга — Миллса. Эта поправка описывается диаграммами, изображенными на рис. 4.

Диаграмме (a) в диагональной α -калибровке соответствует регуляризованный интеграл

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\mu\nu}^{ab}(p)_a &= -\frac{g_1^2}{2} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \varepsilon^{aa_1 a_2} \varepsilon^{bb_1 b_2} \times \\
 &\quad \times [(p+k)_{\mu_2} g_{\mu\mu_1} + (p-2k)_\mu g_{\mu_1\mu_2} + (k-2p)_{\mu_1} g_{\mu\mu_2}] \times \\
 &\quad \times [(k+p)_{\nu_2} g_{\nu\nu_1} + (k-2p)_{\nu_1} g_{\nu\nu_2} + (p-2k)_\nu g_{\nu_1\nu_2}] \times \\
 &\quad \times \frac{(-i\delta^{a_1 b_1})}{k^2 + i0} g_{\mu_1\nu_1} \frac{(-i\delta^{a_2 b_2})}{(p-k)^2 + i0} g_{\mu_2\nu_2} = \\
 &= g_1^2 \delta^{ab} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \{g_{\mu\nu} [(k+p)^2 + (k-2p)^2] + (n-6) p_\mu p_\nu + \\
 &\quad + (4n-6) k_\mu k_\nu + (3-2n) (p_\nu k_\mu + p_\mu k_\nu)\} \times \\
 &\quad \times \{(k^2 + i0) [(p-k)^2 + i0]\}^{-1}, \quad (5.19)
 \end{aligned}$$

где для того, чтобы сохранить правильную размерность $\Pi_{\mu\nu}$, введена размерная константа связи $g_1^2 = g^2 \mu^{4-n}$.

Пользуясь формулой

$$\frac{1}{k^2 (p-k)^2} = \int_0^1 dz \frac{1}{[k^2 (1-z) + (p-k)^2 z]^2} \quad (5.20)$$

и переходя к новым переменным

$$k \rightarrow k + pz, \quad (5.21)$$

запишем этот интеграл в виде

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\mu\nu}^{ab}(p)_a &= g_1^2 \delta^{ab} \int_0^1 dz \frac{d^n k}{(2\pi)^n} [g_{\mu\nu} (5 - 2z + 2z^2) p^2 + 2g_{\mu\nu} k^2 + \\
 &\quad + (4n-6) k_\mu k_\nu - (4n-6) z(1-z) p_\mu p_\nu + \\
 &\quad + (n-6) p_\mu p_\nu] [k^2 + p^2 z(1-z) + i0]^{-1}. \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

В этой формуле опущены нечетные по k члены, вклад которых по соображениям симметрии обращается в нуль.

Переходя к евклидовой метрике, можно выполнить интегрирование по k с помощью формулы

$$\begin{aligned} \int \frac{(k^2)^m d^n k}{[k^2 + p^2 z (1 - z)]^l} &= \frac{i\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty dk^2 \frac{(-k^2)^m (k^2)^{\frac{n}{2}-1}}{[-k^2 + p^2 z (1 - z)]^l} = \\ &= \frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^{m+l} [-p^2 z (1 - z)]^{m+\frac{n}{2}-l} \times \\ &\quad \times \frac{\Gamma\left(m + \frac{n}{2}\right) \Gamma\left(l - \frac{n}{2} - m\right)}{\Gamma(l)}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

При нецелом или комплексном n эта формула является определением интеграла, стоящего в левой части (5.23). Выполняя интегрирование, получаем

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{ab}(p)_a &= \frac{i g_1^2 \delta^{ab}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^1 dz \left\{ [g_{\mu\nu} (5 - 2z + 2z^2) p^2 - \right. \\ &\quad \left. - (4n - 6) p_\mu p_\nu z (1 - z) + (n - 6) p_\mu p_\nu] \times \right. \\ &\quad \times [-p^2 z (1 - z)]^{\frac{n}{2}-2} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) - \\ &\quad \left. - 3(n - 1) g_{\mu\nu} [-p^2 z (1 - z)]^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Интегралы по z берутся с помощью формулы

$$\int_0^1 dz z^{m-n-1} (1 - z)^{m-k-1} = \frac{\Gamma(m - n) \Gamma(m - k)}{\Gamma(2m - n - k)}. \quad (5.25)$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{ab}(p)_a = & \frac{ig_1^2}{(4\pi)^{n/2}} \delta^{ab} \left\{ g_{\mu\nu} p^2 \left[5 \frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{\Gamma(n-2)} - \right. \right. \\ & - 2 \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{\Gamma(n-1)} + 2 \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{\Gamma(n)} + \\ & + \frac{6(n-1)}{2-n} \frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n)} \left. \right] - p_\mu p_\nu \left[(4n-6) \frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n)} - \right. \\ & \left. \left. - (n-6) \frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{\Gamma(n-2)} \right] \right\} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) (-p^2)^{\frac{n}{2}-2}. \quad (5.26) \end{aligned}$$

При получении этой формулы использовано соотношение

$$\Gamma(1 - \omega) = \frac{1}{(1 - \omega)} \Gamma(2 - \omega). \quad (5.27)$$

Как видно, в пределе при $n \rightarrow 4$,

$$\Pi_{\mu\nu}(p)_a \rightarrow \infty,$$

так как функция $\Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right)$ имеет в этой точке полюс. Разлагая $\Pi_{\mu\nu}(p)_a$ в окрестности $n=4$ в ряд Лорана и пользуясь тем, что

$$\left(\frac{\mu^2}{-p^2}\right)^\varepsilon = 1 + \varepsilon \ln\left(\frac{\mu^2}{-p^2}\right) + O(\varepsilon^2), \quad (5.28)$$

получаем окончательное выражение для $\Pi_{\mu\nu}(p)_a$:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{ab}(p)_a = & \frac{ig^2 \delta^{ab}}{16\pi^2} \left\{ (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \left(\frac{19}{6} \varepsilon^{-1} + c_a \right) - \frac{1}{2} p_\mu p_\nu (d + \varepsilon^{-1}) + \right. \\ & \left. + (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \frac{19}{6} \ln \frac{\mu^2}{-p^2} - \frac{1}{2} p_\mu p_\nu \ln \frac{\mu^2}{-p^2} \right\}; \quad (5.29) \end{aligned}$$

$$\varepsilon = \frac{4-n}{2},$$

где c_a и d — конечные постоянные.

Диаграмме (b) соответствует интеграл

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(p)_b = -2g_1^2 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k_\mu (k-p)_\nu}{k^2 (p-k)^2} \delta^{ab}. \quad (5.30)$$

Вычисления, полностью аналогичные предыдущим, дают

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{ab}(p)_b = \frac{ig^2}{16\pi^2} \delta^{ab} \left\{ (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \left(\frac{1}{6} \varepsilon^{-1} + c_b \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} p_\mu p_\nu (\varepsilon^{-1} + d) + (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \frac{1}{6} \ln \frac{\mu^2}{-p^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} p_\mu p_\nu \ln \frac{\mu^2}{-p^2} \right\}. \quad (5.31) \end{aligned}$$

Наконец, диаграмма (c) дает нулевой вклад. Вклад этой диаграммы пропорционален интегралу

$$I = \int \frac{d^4 k}{k^2}. \quad (5.32)$$

В методе размерной регуляризации имеет место формула

$$\begin{aligned} I = \int \frac{d^n k (k^2)^{\alpha-1}}{(2\pi)^n} = 0; \\ \alpha = 0, 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Таким образом, суммарная поправка второго порядка к функции Грина поля Янга — Миллса имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) = \Pi_{\mu\nu}^{ab}(p)_a + \Pi_{\mu\nu}^{ab}(p)_b = \\ = \frac{ig^2 \delta^{ab}}{16\pi^2} (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \left\{ \frac{10}{3} \varepsilon^{-1} + c + \frac{10}{3} \ln \frac{\mu^2}{-p^2} \right\}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Расходимость при $\varepsilon \rightarrow 0$ устраняется, как обычно, вычитательной процедурой. Соответствующий контрчлен равен

$$(z_2 - 1) = \frac{5g^2}{24\pi^2} \varepsilon^{-1} + c, \quad (5.35)$$

что согласуется с формулой (1.33) из § 1. Как видно, выражение (5.34) автоматически поперечно и для устранения расходимостей не требуются калибровочно неинвариантные контрчлены типа контрчлена перенормировки массы поля Янга — Миллса.

§ 6. Обобщенные тождества Уорда

Процедура перенормировки формулируется обычно в терминах функций Грина. В отличие от S -матрицы, функции Грина не являются калибровочно-инвариантным объектом и их значения зависят от конкретного выбора калибровочного условия. Принцип относительности эквивалентен существованию соотношений между функциями Грина, которые мы, по аналогии с электродинамикой, будем называть обобщенными тождествами Уорда. Эти соотношения обеспечивают физическую эквивалентность различных калибровок и играют ключевую роль в доказательстве калибровочной инвариантности и унитарности перенормированной S -матрицы. Из них следует, в частности, что контрчлены, которые необходимо ввести для того, чтобы снять промежуточную регуляризацию, образуют калибровочно-инвариантную структуру.

Начнем с вывода обобщенных тождеств Уорда для регуляризованных перенормированных функций Грина. Во всех дальнейших рассуждениях будет использоваться лишь калибровочная инвариантность регуляризованного действия. Поэтому мы не будем выписывать для него явное выражение, имея в виду, что в качестве такового можно воспользоваться, например, формулой (4.37).

В качестве исходного выберем представление производящего функционала для функций Грина в виде

$$Z = N^{-1} \int \exp \left\{ i \left[S_A - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \int \left[\frac{1}{2\alpha} (f(\square) W(x))^2 + \mathcal{F}_\mu \mathcal{A}_\mu \right] dx \right] \right\} \times \\ \times \Delta(\mathcal{A}) \prod_x \delta(\partial_\mu \mathcal{A}_\mu - W) d\mathcal{A} dW. \quad (6.1)$$

Здесь S_A — калибровочно-инвариантный функционал действия, в который включены все регуляризующие факторы. Для получения обобщенных тождеств Уорда воспользуемся тем же приемом, что и при доказательстве калибровочной инвариантности S -матрицы.

Введем калибровочно-инвариантный функционал $\tilde{\Delta}(\mathcal{A})$, определенный условием

$$\tilde{\Delta}(\mathcal{A}) \int \delta[\partial_\mu \mathcal{A}_\mu^\omega - W(x) - \chi(x)] d\omega = 1, \quad (6.2)$$

где $\chi(x)$ — произвольная матричная функция. С учетом (6.2) перепишем $Z(J)$ в виде

$$\begin{aligned} Z(J) = N^{-1} \int \exp \left\{ i \left[S_\Lambda - \frac{1}{2} \text{tr} \int \left[\mathcal{F}_\mu \mathcal{A}_\mu + \frac{1}{2\alpha} (f(\square) \omega)^2 \right] dx \right] \right\} \times \\ \times \Delta(\mathcal{A}) \tilde{\Delta}(\mathcal{A}) \prod_x \delta(\partial_\mu \mathcal{A}_\mu - W) \times \\ \times \delta(\partial_\mu \mathcal{A}_\mu^\omega - W - \chi) d\mathcal{A} dW d\omega. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Перейдем к новым переменным

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu &\rightarrow \mathcal{A}_\mu^\omega, \\ \omega &\rightarrow \omega^{-1}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Интегралы по ω и W снимаются δ -функциями, причем возникающий якобиан сокращается с $\Delta(\mathcal{A})$.

Принимая во внимание, что значение функционала $\tilde{\Delta}(\mathcal{A})$ на поверхности

$$\partial_\mu \mathcal{A}_\mu = W + \chi \quad (6.5)$$

равно значению функционала $\Delta(\mathcal{A})$ на поверхности

$$\partial_\mu \mathcal{A}_\mu = W, \quad (6.6)$$

получаем

$$\begin{aligned} Z(J) = N^{-1} \int \exp \left\{ i \left[S_\Lambda - \frac{1}{2} \text{tr} \int \left[J_\mu \mathcal{A}_\mu^\omega + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{2\alpha} (f(\square) (\partial_\mu \mathcal{A}_\mu - \chi))^2 \right] dx \right] \right\} \det M \prod_x d\mathcal{A}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Здесь

$$\mathcal{A}_\mu^\omega = \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu u - g[\mathcal{A}_\mu, u] + O(u^2), \quad (6.8)$$

а $u(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\square u - g \partial_\mu [\mathcal{A}_\mu, u] + O(u^2) = W - \partial_\mu \mathcal{A}_\mu = -\chi. \quad (6.9)$$

Представляя решение u в виде ряда по χ , имеем

$$u = -M^{-1}\chi + O(\chi^2), \quad (6.10)$$

где M^{-1} — оператор, обратный к M . Ядро этого оператора $M_{ab}^{-1}(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\square M_{ab}^{-1}(x, y) - gt^{adc} \partial_\mu (A_\mu^d(x) M_{cb}^{-1}(x, y)) = \delta^{ab} \delta(x - y) \quad (6.11)$$

и, очевидно, совпадает со связной частью функции Грина фиктивных частиц во внешнем классическом поле $\mathcal{A}_\mu(x)$:

$$M_{ab}^{-1}(x, y) = \delta^{ab} D^0(x - y) + gt^{adb} \int D^0(x - z) \partial_\mu [A_\mu^d(z) D^0(z - y)] dz + \dots \quad (6.12)$$

Поскольку исходный функционал (6.1) не зависит от χ , его производная по χ равна нулю

$$\left. \frac{dZ}{d\chi} \right|_{\chi=0} = 0. \quad (6.13)$$

Подставляя в эту формулу выражение (6.1), полученное тождественным преобразованием функционала (6.1) и выполняя явно дифференцирование, получаем

$$\begin{aligned} \int \exp \left\{ i \left[S_\Lambda + \int \left[J_\mu^a A_\mu^a + \frac{1}{2\alpha} (f(\square) \partial_\mu A_\mu)^2 \right] dx \right\} \det M \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\alpha} f^2(\square) \partial_\mu A_\mu^a(y) + \right. \\ \left. + \int J_\mu^b(z) (\nabla_\mu^z M^{-1})^{ba}(z, y, \mathcal{A}) dz \right\} \prod_x d\mathcal{A} = 0. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Это равенство есть не что иное, как система обобщенных тождеств Уорда для теории Янга — Миллса. Его можно записать также в терминах вариационных производных

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{\alpha} f^2(\square) \partial_\mu \left\{ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu^a(x)} \right\} + \right. \\ \left. + \int J_\mu^b(y) \left[\nabla_\mu^y \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu^a(y)} \right) M_{yx}^{-1} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) \right]^{ba} dy \right\} Z = 0, \end{aligned} \quad (6.15)$$

где операторы $(M^{-1})^{ba} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right)$ и $\nabla_\mu \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right)$ получаются из $\nabla_\mu (A)$, $(M^{-1})^{ba} (x, y, \mathcal{A})$ очевидной заменой

$$A_\mu^a \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu^a}. \quad (6.16)$$

Действуя оператором M^{-1} на $Z(J)$, получаем полную функцию Грина фиктивных частиц в присутствии классического источника J

$$\begin{aligned} (M^{-1})_{xy}^{ab} \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] Z(J) &= G^{ab}(x, y, J) = \\ &= - \frac{\delta^2}{\delta \bar{\eta}^a(x) \delta \eta^b(y)} N^{-1} \int \exp \left\{ -i \frac{\text{tr}}{2} [\bar{c} \partial_\mu \nabla_\mu c + \mathcal{L}_{YM} + \right. \\ &\quad \left. + \bar{c} \eta + \bar{\eta} c + \mathcal{F}_\mu \mathcal{A}_\mu] dx \right\} \prod_x d\bar{c} dc d\mathcal{A} \Big|_{\bar{\eta}=\eta=0}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Эта функция удовлетворяет уравнению

$$\partial_\mu^x \nabla_\mu^{ab} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) G^{bc}(x, y, J) = \delta^{ac} \delta(x - y) Z(J). \quad (6.18)$$

Из обобщенных тождеств Уорда (6.15) легко получить соотношения между отдельными функциями Грина. Например, беря от (6.15) вариационную производную по $J_\nu^b(y)$ при $J = 0$ и дифференцируя полученное равенство по y_ν , получаем

$$\begin{aligned} \frac{-i}{\alpha} f^2(\square) \partial_\mu^x \partial_\nu^y \left[\frac{\delta^2 Z}{\delta J_\mu^a(x) \delta J_\nu^b(y)} \right]_{J=0} &= \\ &= - \partial_\nu^y \left\{ \nabla_\nu^y \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) G_{yx} \right\}_{J=0}^{ba} = - \delta^{ab} \delta(x - y). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Вариационная производная

$$\frac{1}{i} \frac{\delta^2 Z}{\delta J_\mu^a(x) \delta J_\nu^b(y)} \Big|_{J=0} \quad (6.20)$$

есть не что иное, как двухточечная функция Грина поля Янга — Миллса $G_{\mu\nu}^{ab}(x, y)$. Равенство (6.19) показывает, что продольная часть полной функции Грина

$$G_{\mu\nu}^L(x - y) = \partial_\mu \partial_\nu \square^{-2} \partial_\rho \partial_\sigma G_{\rho\sigma}(x - y) \quad (6.21)$$

совпадает со свободной:

$$G_{\mu\nu}^L = D_{\mu\nu}^L = -\delta^{ab} \frac{\alpha}{(2\pi)^4} \int e^{-ikx} \frac{k_\mu k_\nu}{k^4 f^2(-k^2)} dk. \quad (6.22)$$

Таким образом, в полной аналогии с электродинамикой радиационные поправки к продольной части функции Грина отсутствуют. Соответствующие тождества для трех- и четырехточечных функций выглядят значительно сложнее, чем в электродинамике, поскольку в них нетривиальным образом участвуют функции Грина фиктивных частиц.

Следствием обобщенных тождеств Уорда являются соотношения между контрчленами, необходимыми для устранения расходимостей из функций Грина. Например, из тождества (6.19) для двухточечной функции Грина, следует, что контрчлен, ответственный за перенормировку продольной части волновой функции равен нулю. Можно показать, что если функции Грина удовлетворяют обобщенным тождествам Уорда, то контрчлены образуют калибровочно-инвариантную структуру. Это можно сделать либо путем непосредственного анализа системы (6.15), либо перехода к аналогичным тождествам для одночастично неприводимых функций Грина. Тем самым будет доказано, что перенормировка не нарушает калибровочной инвариантности теории. Проще, однако, поступить наоборот — с самого начала ввести в лагранжиан калибровочно-инвариантные контрчлены наиболее общего вида, а затем с помощью обобщенных тождеств Уорда доказать, что все функции Грина в такой теории стремятся при снятии промежуточной регуляризации к конечному пределу. Именно так мы поступим в следующем параграфе.

Получим теперь обобщенные тождества Уорда для случая, когда поле Янга — Миллса взаимодействует со скалярными ϕ и спинорными ψ полями.

Производящий функционал для функций Грина в этом случае можно записать в виде

$$\begin{aligned} Z(J, \xi, \bar{\eta}, \eta) = & N^{-1} \int \exp \left\{ i \left[S_A + \int \left[\frac{1}{2\alpha} (f(\square) W)^2 + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + J_\mu^a A_\mu^a + \xi^i \phi^i + \bar{\psi}^k \eta^k + \bar{\eta}^k \psi^k \right] dx \right\} \times \\ & \times \Delta(\mathcal{A}) \prod_x \delta(\partial_\mu \mathcal{A}_\mu - W) d\mathcal{A} dW d\phi d\bar{\psi} d\psi. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Калибровочно-инвариантное регуляризованное действие включает также члены, описывающие взаимодействие спинорных и скалярных полей.

Все приведенные выше рассуждения автоматически переносятся и на этот случай. Единственное отличие состоит в том, что одновременно с заменой переменных (6.4), нужно перейти к новым полям φ^ω , ψ^ω

$$\varphi \rightarrow \varphi^\omega, \quad \psi \rightarrow \psi^\omega. \quad (6.24)$$

В результате в экспоненте преобразованного функционала появятся дополнительные члены

$$\delta_\chi (\xi^i \varphi^i + \bar{\psi}^k \eta^k + \bar{\eta}^k \psi^k) = \xi^i \delta_\chi \varphi^i + \delta_\chi \bar{\psi}^k \eta^k + \bar{\eta}^k \delta_\chi \psi^k \quad (6.25)$$

и обобщенные тождества Уорда будут иметь вид

$$\begin{aligned} & \int \exp \left\{ i \left[S_\Lambda + \int \left[A_\mu^a J_\mu^a + \xi^i \varphi^i + \bar{\psi}^j \eta^j + \bar{\eta}^j \psi^j + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{2\alpha} (f(\square) \partial_\mu A_\mu^a)^2 \right] dx \right\} \det M \left\{ \frac{1}{\alpha} f^2(\square) \partial_\mu A_\mu^a(y) + \right. \\ & \quad \left. + \int [J_\mu^b(z) [\nabla_\mu^z M^{-1}(z, y, \mathcal{A})]^{ba} + \xi^i(z) \frac{\delta_\chi \varphi^i(z)}{\delta \chi^a(y)} \Big|_{\chi=0} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\delta_\chi \bar{\psi}^k(z)}{\delta \chi^a(y)} \Big|_{\chi=0} \eta^k(z) + \bar{\eta}^k(z) \frac{\delta_\chi \psi^k(z)}{\delta \chi^a(y)} \Big|_{\chi=0} \right] dz \Big\} = 0. \quad (6.26) \end{aligned}$$

В таком виде обобщенные тождества Уорда справедливы как в симметричной теории, так и в теории со спонтанно нарушенной симметрией. Отличие состоит лишь в явном виде калибровочного преобразования скалярных полей φ^ω . Если поля φ реализуют некоторое представление калибровочной группы Ω с генераторами Γ^c

$$\delta \varphi^a = g (\Gamma^c)^{ab} \varphi^b u^c + O(u^2), \quad (6.27)$$

то тождество (6.26) можно записать в виде (спинорные поля опускаем)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha} f^2(\square) \partial_\mu^x \left[\frac{1}{i} \frac{\delta Z}{\delta J_\mu^a(x)} \right] + \\ & \quad + \int \left[J_\mu^b(y) \left\{ \nabla_\mu \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right] G(y, x, J, \xi) \right\}^{ba} + \right. \\ & \quad \left. + g \xi^b(y) (\Gamma^d)^{bc} \frac{1}{i} \frac{\delta G^{da}(y, x, J, \xi)}{\delta \xi^c(y)} \right] dy = 0. \quad (6.28) \end{aligned}$$

В случае спонтанно нарушенной симметрии преобразование (6.27) модифицируется следующим образом

$$\delta\varphi^a = g(\Gamma^c)^{ab}\varphi^b u^c + g(\Gamma^c)^{ab}r^b u^c + O(u^2), \quad (6.29)$$

где r^b — постоянный вектор, который без ограничения можно считать направленным по оси с номером $\bar{b}$: $r^b = r\delta^{\bar{b}b}$. Соответственно в тождестве (6.28) появляется дополнительный член

$$rg \int \xi^b(y) (\Gamma^d)^{b\bar{b}} G^{da}(y, x, J, \zeta) dy. \quad (6.30)$$

Например, для модели (I.3.25), в которой скалярные поля образуют комплексный SU_2 -дублет

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} iB_1(x) + B_2(x) \\ \sqrt{2}\mu + \sigma(x) - iB_3(x) \end{pmatrix}, \quad (6.31)$$

калибровочное преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} \delta\sigma &= -\frac{g}{2}(B^a u^a), \\ \delta B^a &= -m_1 u^a - \frac{g}{2}\varepsilon^{abc}B^b u^c - \frac{g}{2}\sigma u^a, \\ m_1 &= \frac{g\mu}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Обобщенные тождества Уорда выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} f^2(\square) \partial_\mu \left[\frac{1}{i} \frac{\delta Z}{\delta J_\mu^a(x)} \right] + \int \left\{ \left[J_\mu^b(y) \nabla_\mu^{bd} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) - \right. \right. \\ \left. - \zeta_\sigma(y) \frac{g}{2} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \zeta_B^d(y)} - \zeta_B^b(y) \left(\frac{g}{2} \varepsilon^{bcd} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \zeta_B^c(y)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \delta^{bd} \frac{g}{2} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \zeta_\sigma(y)} + m_1 \delta^{bd} \right) \right] G^{da}(y, x, J, \zeta) \right\} dy = 0. \end{aligned} \quad (6.33)$$

В заключение этого параграфа мы покажем, что обобщенные тождества Уорда (6.14) выражают некоторую дополнительную, не имеющую классического аналога, симметрию эффективного лагранжиана квантованного поля Янга — Миллса. (Эффективным лагранжианом мы называем выражение, стоящее в показателе экспоненты

в формуле (3.3.54) для S -матрицы. Это выражение включает помимо классического лагранжиана Янга — Миллса фиксирующий калибровку член и лагранжиан фиктивных полей.)

Запишем производящий функционал для функций Грина в виде континуального интеграла от $\exp \{i \times \text{локальное действие}\}$, вводя явно поля фиктивных частиц

$$Z = N^{-1} \int \exp \left\{ i \int \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2 + \bar{c}^a M^{ab} c^b + \bar{c}^a \eta^a + \bar{\eta}^a c^a \right] dx \right\} \prod_x d\mathcal{A} d\bar{c} dc. \quad (6.34)$$

В этой формуле мы ввели помимо источника для поля Янга — Миллса антикоммутирующие источники $\bar{\eta}$, η для фиктивных полей. Функционал (6.34) отвечает определенному выбору калибровочного условия (для простоты мы рассматриваем случай $f(\square) = 1$). Поэтому эффективное действие, стоящее в показателе экспоненты, не является калибровочно инвариантным. Тем не менее существуют преобразования, затрагивающие одновременно как поля Янга — Миллса, так и фиктивные поля $\bar{c}$, c , относительно которых эффективный лагранжиан инвариантен. Эти преобразования имеют следующий вид

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A_\mu^a(x) + [\nabla_\mu c(x)]^a \varepsilon, \quad (6.35)$$

$$c^a(x) \rightarrow c^a(x) - \frac{1}{2} t^{abd} c^b(x) c^d(x) \varepsilon, \quad (6.36)$$

$$\bar{c}^a(x) \rightarrow \bar{c}^a(x) + \frac{1}{\alpha} [\partial_\mu A_\mu^a(x)] \varepsilon. \quad (6.37)$$

Здесь ε — независимый от x параметр, являющийся элементом алгебры Грассмана

$$\varepsilon^2 = 0; \quad \varepsilon c + c \varepsilon = 0; \quad \varepsilon \bar{c} + \bar{c} \varepsilon = 0; \quad [\varepsilon, \mathcal{A}_\mu] = 0. \quad (6.38)$$

(Напомним, что фиктивные поля $\bar{c}$, c также являются антикоммутирующими переменными.) Преобразования подобного типа, нетривиальным образом перепутывающие коммутирующие и антикоммутирующие величины, получили название *суперпреобразований*.

Убедимся, что эффективный лагранжиан, фигурирующий в формуле (6.34), инвариантен относительно пре-

образований (6.35) — (6.37). Преобразование (6.35) является частным случаем калибровочного преобразования, поэтому оно оставляет инвариантным первый член в показателе экспоненты (6.34). Нетрудно проверить, что вариация $\delta(\nabla_\mu c)$ тоже равна нулю. Действительно,

$$\delta(\nabla_\mu c)^a = -\frac{1}{2} t^{abd} [\partial_\mu (c^b c^d) - A_\mu^b t^{def} c^e c^f] \epsilon - t^{abd} (\partial_\mu c^b - t^{bef} A_\mu^e c^f) \epsilon c^d. \quad (6.39)$$

Из антикоммутативности переменных c^f, c^d следует, что

$$t^{abd} t^{bef} c^f c^d = \frac{1}{2} t^{abd} t^{def} c^e c^f, \quad (6.40)$$

и поэтому правая часть (6.39) обращается в нуль. Таким образом полная вариация эффективного лагранжиана равна

$$\delta \mathcal{L}_3 = \frac{1}{\alpha} \partial_\mu A_\mu^a \partial_\mu (\nabla_\mu c)^a \epsilon - \frac{1}{\alpha} \partial_\mu A_\mu^a M^{ab} c^b \epsilon. \quad (6.41)$$

Вспоминая определение оператора M , видим, что это выражение равно нулю.

Преобразования (6.35) — (6.37) не имеют наглядного геометрического смысла и инвариантность эффективного лагранжиана относительно этих преобразований не связана с сохранением какой-либо наблюдаемой величины. Тем не менее она приводит к ряду полезных следствий, и в частности, может быть использована для альтернативного вывода обобщенных тождеств Уорда.

С этой целью сделаем в интеграле (6.34) замену переменных интегрирования (6.35) — (6.37). Якобиан этого преобразования, который символически можно записать в виде

$$J = \det \begin{pmatrix} \delta_{\mu\nu} \delta^{ab}, & \nabla_\mu^{ab} \epsilon, & 0 \\ 0, & \delta^{ab} - t^{adb} c^d \epsilon, & 0 \\ \delta^{ab} \frac{1}{\alpha} \epsilon \partial_\mu, & 0, & \delta^{ab} \end{pmatrix}, \quad (6.42)$$

очевидно, равен единице. Следовательно, в результате замены (6.35) — (6.37) меняются лишь члены с источниками. Выписывая явно их вариацию и приравнявая нулю

производную $dZ/d\varepsilon$, получаем соотношение

$$0 = \int \exp \left\{ i \int [\mathcal{L}_\varepsilon + J_\mu^a A_\mu^a + \bar{c}^a \eta^a + \bar{\eta}^a c^a] dx \right\} \times \\ \times \left\{ J_\mu^b(y) [\nabla_\mu c(y)]^b - \frac{1}{\alpha} \partial_\mu A_\mu^a(y) \eta^a(y) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \bar{\eta}^a(y) t^{abd} c^b(y) c^d(y) \right\} dy \prod_x d\mathcal{A} d\bar{c} dc, \quad (6.43)$$

из которого легко получить обобщенное тождество Уорда (6.14). Дифференцируя равенство (6.43) по η и полагая $\bar{\eta}, \eta = 0$, имеем

$$0 = \int \exp \left\{ i \int [\mathcal{L}_\varepsilon + J_\mu^a A_\mu^a] dx \right\} \left\{ -\frac{1}{\alpha} \partial_\mu A_\mu^a(y) + \right. \\ \left. + \int \bar{c}^a(y) J_\mu^b(z) [\nabla_\mu c(z)]^b dz \right\} \prod_x d\mathcal{A} d\bar{c} dc. \quad (6.44)$$

Выполнив с помощью формулы (6.17) интегрирование по $\bar{c}, c$, получаем в точности тождество (6.14). Совершенно аналогично можно получить обобщенные тождества Уорда для случая, когда поле Янга — Миллса взаимодействует с полями материи.

До сих пор мы рассматривали лишь ковариантные α -калибровки, с которыми обычно приходится иметь дело в практических вычислениях. Однако все рассуждения автоматически переносятся и на более общий случай, когда фиксирующий калибровку член имеет следующий вид

$$B(A) = \exp \left\{ \frac{i}{2} \int \Phi^2(\mathcal{A}, x) dx \right\}, \quad (6.45)$$

где $\Phi(\mathcal{A})$ — некоторый функционал от $\mathcal{A}(x)$, который в принципе может содержать, помимо линейных по $\mathcal{A}$ членов, члены более высокого порядка. В этом случае, в соответствии с общей процедурой квантования, описанной в третьей главе, оператор M , фигурирующий в производящем функционале для функций Грина, определяется формулой (1.1.26)

$$M_{\Phi\alpha} = \int \frac{\delta \Phi(\mathcal{A}, x)}{\delta A_\mu(y)} \nabla_\mu \alpha(y) dy. \quad (6.46)$$

Чтобы получить обобщенные тождества Уорда для этого случая, достаточно во всех выкладках, приведенных в начале этого параграфа, заменить

$$\begin{aligned} \partial_\mu A_\mu &\rightarrow \Phi(\mathcal{A}), \\ M &\rightarrow M_\Phi. \end{aligned} \quad (6.47)$$

В результате получим вместо (6.14)

$$\begin{aligned} &\int \exp \left\{ i \int \left\{ S_\Lambda + \left[\frac{1}{2} \Phi^2(\mathcal{A}) + J_\mu^a A_\mu^a \right] dx \right\} \det M_\Phi \times \right. \\ &\times \left. \left\{ \Phi^a(A, y) + \int J_\mu^b(z) (\nabla_\mu^z M_\Phi^{-1})^{ba}(z, y, A) dz \right\} \prod_x d\mathcal{A} = 0. \right. \end{aligned} \quad (6.48)$$

§ 7. Структура перенормированного действия

Проанализируем структуру примитивно расходящихся диаграмм в теории Янга — Миллса. Начнем с поля Янга — Миллса в пустоте. В α -калибровке эффективный лагранжиан имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \frac{1}{4} [(\partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu) + g[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]]^2 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2\alpha} (f(\square) \partial_\mu \mathcal{A}_\mu)^2 + \bar{c} \square c - g \bar{c} \partial_\mu [\mathcal{A}_\mu, c] \right\}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Диаграммная техника включает следующие элементы:

а) Векторные линии $\overline{\mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu}$, линии фиктивных s -частиц $\overline{ss}$. Этим линиям соответствуют свободные функции Грина $D_{\mu\nu}(p)$ и $D(p)$ с асимптотиками при $p \rightarrow \infty$, p^{-2} .

б) Вершины с тремя выходящими векторными линиями и одной производной.

с) Вершины с четырьмя векторными линиями без производных.

д) Вершины с одной векторной и двумя фиктивными линиями и одной производной.

В соответствии с общей формулой, выведенной в § 2, индекс диаграммы, содержащей n_3 тройных векторных

вершин, n_4 четверных вершин, n_c вершин с участием фиктивных частиц, L_{in} внутренних векторных линий L_{in}^c внутренних фиктивных линий равен

$$\omega = 2L_{in} + 3L_{in}^c - 4(n_4 - 1) - 3(n_3 + n_c). \quad (7.2)$$

Воспользовавшись тем, что число внутренних линий L_{in} , L_{in}^c связано с числом внешних линий L_{ex} соотношением

$$\begin{aligned} L_{in} &= \frac{4n_4 + 3n_3 + n_c - L_{ex}}{2}; \\ L_{in}^c &= \frac{2n_c - L_{ex}^c}{2}, \end{aligned} \quad (7.3)$$

выразим индекс диаграммы через числа внешних линий

$$\omega = 4 - L_{ex} - L_{ex}^c. \quad (7.4)$$

Из формулы (7.4) следует, что ряд теорий возмущений для поля Янга — Миллса в α -калибровке содержит

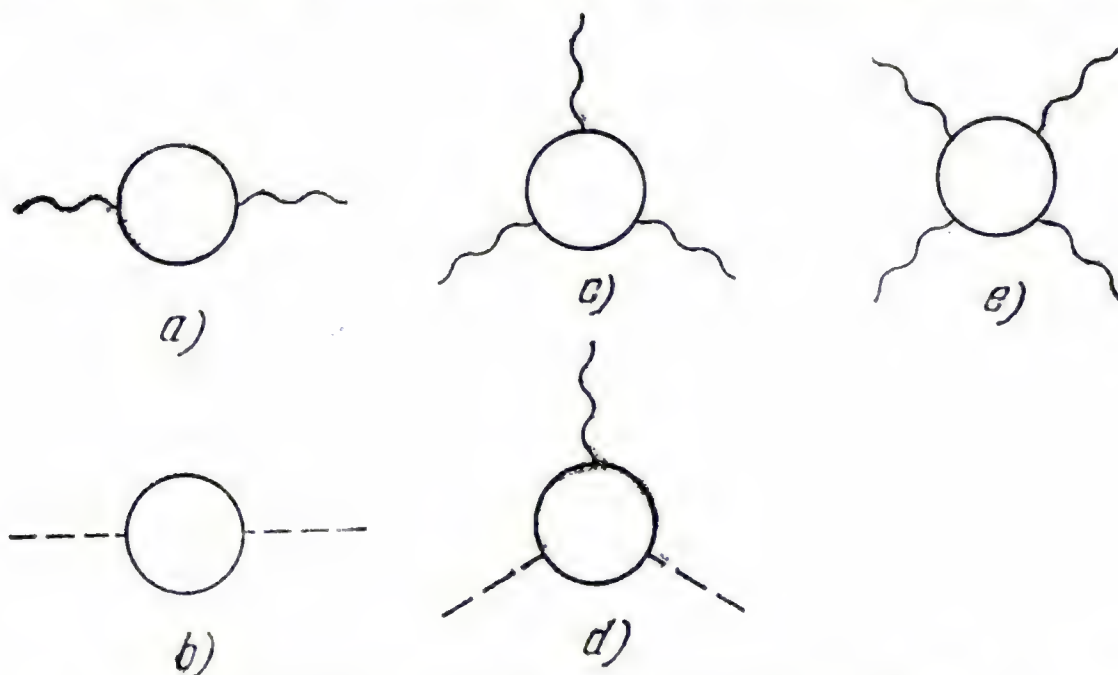


Рис. 9. Типы расходящихся диаграмм в теории Янга — Миллса.

конечное число типов примитивно расходящихся диаграмм. Эти диаграммы символически изображены на рис. 9. (Формально имеется еще логарифмически расходящаяся диаграмма с двумя внешними векторными и двумя фиктивными линиями и расходящаяся диаграмма с четырьмя фиктивными линиями. Однако, как видно из формулы (7.1), производную, стоящую в одной из внешних вершин, интегрированием по частям можно пере-

бросить на внешнюю s -линию. Поэтому в действительности соответствующие интегралы сходятся.)

Диаграммы собственной энергии (a) и (b) имеют индекс 2. Диаграммы (c) , (d) имеют индекс 1, диаграмма (e) — индекс 0. По тем же причинам, что и выше, фактический индекс диаграмм, имеющих внешние s -линии, понижается на 1. Кроме того, из соображений лоренц-инвариантности, все диаграммы, имеющие индекс единица, в действительности расходятся лишь логарифмически.

В соответствии с общей процедурой, для устранения этих расходимостей из соответствующих собственных вершинных функций нужно вычесть несколько первых членов разложения в ряд Тейлора по внешним импульсам. В качестве центра разложения обычно выбирают точку, в которой внешние импульсы лежат на массовой поверхности, поскольку такой выбор обеспечивает правильную нормировку одночастичных состояний. Однако в случае, когда рассматриваемая система включает частицы с нулевой массой, вершинные функции на массовой поверхности могут содержать дополнительные сингулярности, обусловленные расходимостью соответствующих интегралов в начале координат (инфракрасная катастрофа). Поэтому мы будем делать вычитания в точках, для которых значения всех внешних импульсов лежат в евклидовой области. Для вершины с n внешними импульсами p_i таковыми являются, например, точки

$$p_i^2 = -a^2; \quad p_i p_l = \frac{a^2}{n-1}. \quad (7.5)$$

В этих точках все вершинные функции вещественны и свободны от инфракрасных сингулярностей.

Выпишем наиболее общие выражения для вычитаемых членов, совместные с условиями релятивистской инвариантности и бозе-симметрии. Собственные вершинные функции, соответствующие диаграммам, изображенным на рис. 9, имеют следующую структуру (Здесь выписаны вершинные функции для группы SU_2 . В этом случае тензорная структура по зарядовым индексам исчерпывается тензорами ε^{abc} и δ^{ab} . В общем случае могут присутствовать дополнительные линейно-независи-

мые структуры, например, члены, пропорциональные симметричному тензору d^{abc} в случае группы SU_3 . Данное ниже доказательство перенормируемости остается справедливым и в этом случае.):

$$\Gamma_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(p) \equiv \Gamma_{\mu\nu}^{ab}(p) = \delta^{ab} \{b_1 g_{\mu\nu} + b_2 p_\mu p_\nu + \\ + b_3 (p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu)\} + \dots,$$

$$\Gamma_{\bar{c}c}^{ab}(p) \equiv \Gamma^{ab}(p) = \delta^{ab} b_4 p^2 + \dots,$$

$$\Gamma_{\mathcal{A}^3} \equiv \Gamma_{\lambda\nu\rho}^{lmn}(p, k, q) = i\varepsilon^{lmn} b_5 \{g_{\lambda\nu} (p - k)_\rho + \\ + g_{\nu\rho} (k - q)_\lambda + g_{\lambda\rho} (q - p)_\nu\} + \dots, \quad (7.6)$$

$$\Gamma_{\mathcal{A}\bar{c}c} \equiv \Gamma_\mu^{lmn}(p, k, q) = \frac{i}{2} \varepsilon^{lmn} b_6 (k - q)_\mu + \dots,$$

$$\Gamma_{\mathcal{A}^4} \equiv \Gamma_{\mu\nu\rho\lambda}^{ilmn}(p, k, q, r) = \\ = P \{b_7 \varepsilon^{gil} \varepsilon^{gmn} g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} + b_8 \delta^{il} \delta^{mn} g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}\} + \dots$$

В последней формуле P — оператор симметризации по парам индексов (i, μ) , (l, ν) , (m, ρ) , (n, λ) . Коэффициенты b_i зависят от параметров регуляризации Λ , μ , и положения точек вычитания a_i ; ... обозначает следующие члены разложения в ряд Тейлора, стремящиеся при снятии регуляризации к конечному пределу. Вычитание полиномов (7.6) эквивалентно введению в эффективный лагранжиан следующих контрчленов:

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{4} \text{tr} \left\{ b_1 \mathcal{A}_\mu^2 + b_2 (\partial_\mu \mathcal{A}_\mu)^2 + \frac{b_3}{2} (\partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu)^2 + \right. \\ - 2b_4 \bar{c} \square c + b_5 (\partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu) [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] + \\ + b_6 \bar{c} \partial_\mu [\mathcal{A}_\mu, \bar{c}] + \frac{b_7}{2} [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] \left. \right\} + \\ + \frac{b_8}{16} \{\text{tr} (\mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\mu)\}^2. \quad (7.7)$$

Число типов контрчленов, необходимых для устранения расходимостей, конечно и, следовательно, теория перенормируема. Однако контрчленная часть действия (7.7) содержит значительно больше параметров чем исходный лагранжиан. При произвольных параметрах b_i перенормированная теория не калибровочно-инвариантна и не удовлетворяет принципу относительности, что означает

потерю эквивалентности различных калибровок и вследствие этого нарушение унитарности.

При фиксированной промежуточной регуляризации значения параметров b_i зависят от выбора точек вычитания a_i . Мы покажем, что этот произвол позволяет подобрать параметры b_i таким образом, чтобы перенормированная теория была калибровочно-инвариантна.

Выясним, какие ограничения накладывает принцип относительности на вид перенормированного эффективного лагранжиана. Прежде всего заметим, что калибровочная инвариантность лагранжиана Янга — Миллса не нарушится, если мы умножим его на константу. Кроме того, мы можем произвольно распоряжаться параметром g , играющим роль заряда. Другими словами, наиболее общее выражение для калибровочно-инвариантного лагранжиана поля Янга — Миллса имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{z_2}{8} \text{tr} \{ (\partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu) + g z_1 z_2^{-1} [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] \}^2. \quad (7.8)$$

Роль параметра калибровочного преобразования для этого лагранжиана играет константа $\tilde{g}$:

$$\tilde{g} = g z_1 z_2^{-1}. \quad (7.9)$$

Чтобы теория была самосогласованной, тот же параметр должен фигурировать и в определении ковариантной производной. В частности, в операторе M , который был определен формулой

$$M = \partial_\mu \nabla_\mu = \partial_\mu (\partial_\mu - g [\mathcal{A}_\mu, \quad]), \quad (7.10)$$

константу g нужно заменить на $\tilde{g}$. Записывая $\det M(\tilde{g})$ в виде интеграла по полям фиктивных частиц

$$\det M(\tilde{g}) = \text{const} \int \exp \left\{ \frac{-i}{2} \text{tr} \int \tilde{z}_2 \bar{c} \partial_\mu (\partial_\mu c - \tilde{z}_1 \tilde{z}_2^{-1} g \times \right. \\ \left. \times [\mathcal{A}_\mu, c]) dx \right\} \prod_x \bar{d}c \, dc, \quad (7.11)$$

где

$$\tilde{z}_2^{-1} \tilde{z}_1 = z_2^{-1} z_1, \quad (7.12)$$

и мы опять воспользовались возможностью умножения лагранжиана как целого на произвольную константу, получаем наиболее общее выражение для допустимого

эффективного лагранжиана

$$\mathcal{L}_R = \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \frac{1}{4} z_2 [(\partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu) + z_1 z_2^{-1} g [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]]^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\alpha} (f(\square) \partial_\mu \mathcal{A}_\mu)^2 - \tilde{z}_2 (\bar{c} \square c - \tilde{z}_1 \tilde{z}_2^{-1} g \bar{c} \partial_\mu [\mathcal{A}_\mu, c]) \right\}. \quad (7.13)$$

Константы $z_1, z_2, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2$ связаны соотношением (7.12). Привычное условие $z_1 = z_2$ не является необходимым, и вообще говоря, не выполняется: лагранжиан (7.13) имеет ту же структуру, что и перенормированный лагранжиан, отличаясь от последнего лишь мультипликативной перенормировкой полей $\mathcal{A}_\mu, \bar{c}, c$, заряда g и калибровочного параметра α

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu &\rightarrow z_2^{1/2} \mathcal{A}_\mu, \quad c \rightarrow \tilde{z}_2^{1/2} c, \quad \bar{c} \rightarrow \tilde{z}_2^{1/2} \bar{c}, \\ g &\rightarrow z_1 z_2^{-3/2} g, \quad \alpha \rightarrow z_2 \alpha. \end{aligned} \quad (7.14)$$

В отличие от общего выражения (7.7), этот лагранжиан содержит всего три независимых члена, и на первый взгляд не очевидно, что с их помощью можно устранить все расходимости.

Вводя инвариантную промежуточную регуляризацию, можно построить производящий функционал для функций Грина $Z_R(J)$, порождаемых лагранжианом (7.13). Мы будем считать, что регуляризация осуществляется с помощью метода высших ковариантных производных, описанного в § 3. Поскольку во всех дальнейших рассуждениях используется лишь инвариантность регуляризованного действия, не будем выписывать явно регуляризующие члены, имея в виду, что они описываются, например, формулой (4.34).

Роль параметра калибровочного преобразования для лагранжиана (7.13) играет константа $\tilde{g} = z_1 z_2^{-1} g$. Поэтому обобщенные тождества Уорда, которым удовлетворяет функционал $Z_R(J)$, отличаются от тождеств (6.15) заменой g в операторах M^{-1} и ∇_μ на $\tilde{g}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} f^2(\square) \partial_\mu^x \left\{ \frac{1}{i} \frac{\delta Z_R}{\delta J_\mu^a(x)} \right\} + \\ + \left\{ \int J_\mu^b(y) \left[\delta^{bd} \partial_\mu^y - \tilde{g} t^{bcd} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu^c(y)} \right] \times \right. \\ \left. \times \tilde{M}_{yx}^{-1 da} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) dy \right\} Z_R = 0, \quad (7.15) \end{aligned}$$

где значок $\sim$ обозначает, что константа g , фигурирующая в определении оператора M^{-1} , заменена на $\tilde{g}$.

В этой формуле удобно перейти к перенормированным функциям Грина фиктивных частиц, определенным равенством

$$G_R^{da}(y, x, J) = N^{-1} \int \bar{c}^d(y) c^a(x) \exp \left\{ i \int [\tilde{z}_1 \bar{c}^i(s) \square c^i(s) - \right. \\ \left. - \tilde{z}_1 t^{ikl} \bar{g} \bar{c}^i(s) \partial_\mu [A_\mu^k(s) c^l(s)] + \mathcal{L}_R^{YM}(s) + \right. \\ \left. + A_\mu^a J_\mu^a] ds \right\} \prod_x d\mathcal{A} d\bar{c} dc. \quad (7.16)$$

Для этого заметим, что

$$\tilde{M}_{yx}^{-1ab} Z_R = N^{-1} \int \bar{c}^a(y) c^b(x) \exp \left\{ i \int [\bar{c}^a(s) \square c^a(s) - \right. \\ \left. - \tilde{z}_2^{-1} \tilde{z}_1 g t^{abd} \bar{c}^a(s) \partial_\mu [A_\mu^b(s) c^d(s)] + \mathcal{L}_R^{YM}(s) + \right. \\ \left. + A_\mu^a J_\mu^a] ds \right\} \prod_x d\mathcal{A} d\bar{c} dc = \tilde{z}_2 G_R^{ab}(y, x, J). \quad (7.17)$$

Последнее соотношение получается из (7.16) заменой переменных

$$c \rightarrow \tilde{z}_2^{-1/2} c, \quad \bar{c} \rightarrow \tilde{z}_2^{-1/2} \bar{c}. \quad (7.18)$$

Представляя источник J_μ в правой части тождества (7.15) в виде $J_\mu = J_\mu^{\text{tr}} + \partial_\mu \square^{-1} \partial_\nu J_\nu$, и пользуясь тем, что

$$\partial_\mu^y (\nabla_\mu(\tilde{g}) \tilde{M}^{-1})_{yx}^{ab} = \delta^{ab} \delta(x - y), \quad (7.19)$$

перепишем эти соотношения в виде

$$\frac{1}{\alpha} f^2(\square) \partial_\mu^x \left\{ \frac{1}{i} \frac{\delta Z_R}{\delta J_\mu^a(x)} \right\} = \\ = \left\{ \int D_0(x - y) \partial_\mu J_\mu^a(y) dy \right\} Z_R + \\ + \int J_\mu^{\text{tr} b}(y) g \tilde{z}_1 t^{bcd} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu^c(y)} G_R^{da}(y, x, J) dy. \quad (7.20)$$

Мы покажем, что при подходящем выборе констант z_2 , $\tilde{z}_2$, $\tilde{z}_1$ из тождества (7.20) следует конечность всех функ-

ций Грина. Доказательство будет строиться по индукции. Предполагая, что все диаграммы до n -го порядка включительно конечны, мы докажем, что функционал F , стоящий в правой части уравнения (7.20), конечен до порядка $n + 1$. Отсюда следует, что функционал

$$\partial_\mu^x \left\{ \frac{1}{i} \frac{\delta Z_R}{\delta J_\mu^a(x)} \right\} \quad (7.21)$$

также конечен с точностью до порядка $n + 1$. Последнее, как мы увидим, означает, что конечны все функции Грина, кроме, быть может, двухточечных функций поля Янга — Миллса Γ_{AA} и фиктивных частиц Γ_{cc} . Из этих функций расходимости устраняются с помощью констант перенормировки z_2 и $\tilde{z}_2$, выбор которых остается в нашем распоряжении.

Доказательство выглядит особенно просто в случае калибровок, для которых продольная часть функции Грина поля Янга — Миллса быстро убывает при больших импульсах, т. е. когда фигурирующая в определении обобщенной α -калибровки функция $f(k^2)$ имеет асимптотику k^{2n} с $n > 1$. (Сюда же, разумеется, относится и собственно лоренцева калибровка $\alpha = 0$, когда продольная часть $D_{\mu\nu}$ равна нулю.)

Доказательство в случае произвольной калибровки не содержит никаких принципиально новых моментов, но более громоздко. Чтобы не отвлекать внимание читателя техническими деталями, мы рассмотрим вначале случай $f(k^2) \xrightarrow[k^2 \rightarrow \infty]{} k^{2n}$, $n \geq 1$, и вернемся к обсуждению калибровок общего вида позже, когда будем исследовать зависимость функций Грина от калибровки.

В низшем порядке g^2 расходятся лишь двухточечные функции Γ_{AA} и Γ_{cc} . Собственная вершинная функция $\Gamma_{AA} \equiv \Gamma_{\mu\nu}^{mn}(k)$ во втором порядке связана с функцией Грина $G_{\mu\nu}^{ab}(k)$ соотношением

$$G_{\alpha\beta}^{ab}(k) = D_{\alpha\mu}^{am}(k) \Gamma_{\mu\nu}^{mn}(k) D_{\nu\beta}^{nb}(k) + D_{\alpha\beta}^{ab}(k). \quad (7.22)$$

Из тождества (7.20) следует

$$\begin{aligned} \frac{f^2(-k^2)}{\alpha} k^\alpha k^\beta G_{\alpha\beta}^{ab}(k) &= \frac{\alpha k_\mu}{k^2} \Gamma_{\mu\nu}^{ab}(k^2) \times \\ &\times \frac{k_\nu}{k^2 f^2(-k^2)} + \delta^{ab} = \delta^{ab}, \end{aligned} \quad (7.23)$$

т. е. функция $\Gamma_{\mu\nu}^{ab}(k)$ поперечна

$$\Gamma_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta^{ab} (k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \Pi(k^2). \quad (7.24)$$

Следовательно, константы b_1 и b_2 в лагранжиане (7.7) равны нулю, и для устранения расходимости достаточно одного контрчлена $z_2^{(0)}$. Аналогичным образом контрчлен $\tilde{z}_2^{(0)}$ обеспечивает конечность функции Грина фиктивных частиц.

Докажем теперь конечность вершинных функций третьего порядка. Вершинной функции $\Gamma_{\text{сс}\mathcal{A}}^-$ соответствуют сильно связанные диаграммы, изображенные на

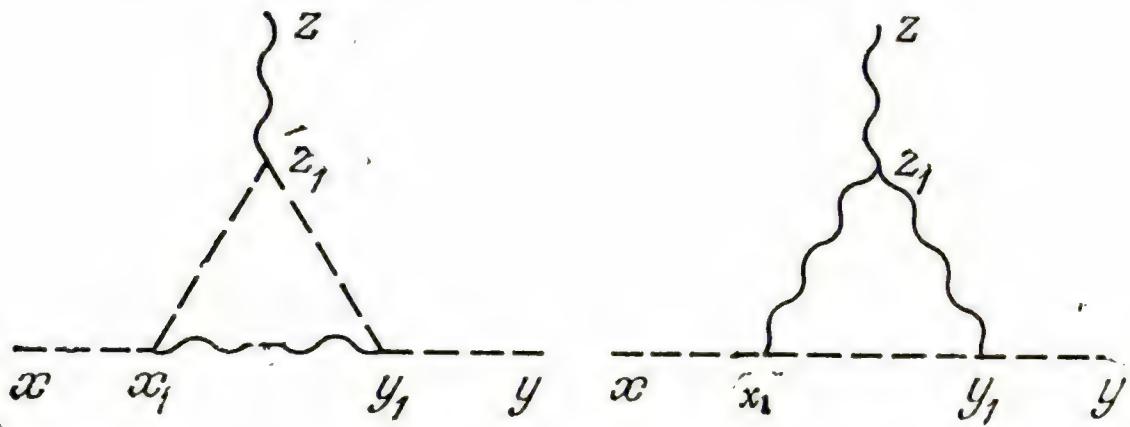


Рис. 10. Поправки третьего порядка к вершинной функции $\Gamma_{\text{сс}\mathcal{A}}^-$.

рис. 10. Как было показано выше, индекс этих диаграмм равен нулю, т. е. формально они логарифмически расходятся. Нетрудно убедиться, однако, что в калибровках, для которых $f(k^2) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} |k|^{2n}$, $n \geq 1$, расходимость отсутствует. Действительно, аналитическое выражение, отвечающее диаграммам на рис. 10, представляет собой в координатном представлении сумму членов типа

$$\sim \int D(x - x_1) \partial_{\nu}^{x_1} \{ D(x_1 - z_1) \partial_{\rho}^{z_1} [D_{\rho\mu}(z_1 - z) D(z_1 - y_1)] \times \\ \times \partial_{\lambda}^{y_1} [D_{\nu\lambda}(x_1 - y_1) D(y_1 - y)] \} dx_1 dy_1 dz_1.$$

Интегрируя по частям, это выражение легко преобразовать к виду, когда производные, стоящие в вершинах x_1 и y_1 , действуют либо на векторную функцию Грина, в результате чего в интеграл дает вклад лишь ее быстро убывающая продольная часть, либо на внешнюю линию. Поэтому истинный индекс расходимости понижается, а диаграммам на рис. 10 отвечают сходящиеся

интегралы. Соответственно, в рассматриваемых калибровках константа $\tilde{z}_1$ конечна.

Для функции Грина $G_{\mu\nu\rho}^{abc}(x, y, z)$ тождество (7.20) дает

$$\frac{1}{\alpha} f^2(\square) \partial_\mu^x G_{\mu\nu\rho}^{abc}(x, y, z) = g \tilde{z}_1 t^{bed} \left(g_{v\alpha} - \frac{\partial_v \partial_\alpha}{\square} \right) \times$$

$$\times \frac{1}{(i)^3} \frac{\delta^2 G_R^{da}(y, x, J)}{\delta J_\alpha^e(y) \delta J_\rho^c(z)} \Big|_{J=0} + (b \leftrightarrow c, y \leftrightarrow z, v \leftrightarrow \rho). \quad (7.25)$$

Функции $\frac{\delta^2 G_R^{da}(y, x, J)}{\delta J_\alpha^e(y) \delta J_\rho^c(z)} \Big|_{J=0}$ отвечают диаграммы, изображенные на рис. 11.

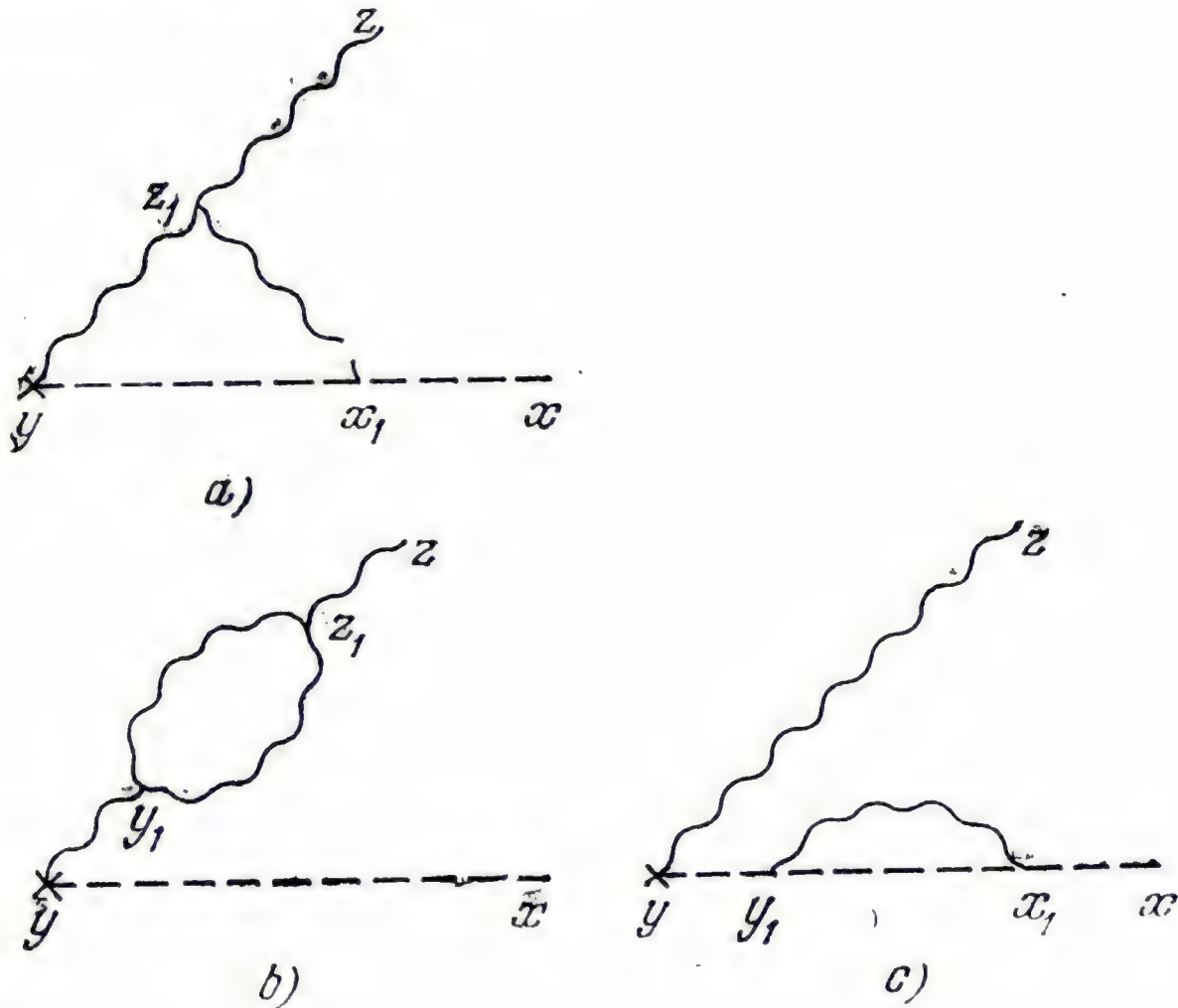


Рис. 11. Диаграммы, отвечающие функции $\frac{\delta^2 G_R^{da}(y, x, J)}{\delta J_\alpha^e(y) \delta J_\rho^c(z)} \Big|_{J=0}$.

Диаграммы (b) и (c) слабосвязные, и сходимость соответствующих интегралов следует из конечности двухточечных функций Грина $G_{\mu\nu}^{ab}$ и G^{ab} второго порядка.

Диаграмма (a) имеет структуру, аналогичную диаграмме, описывающей переход двух фиктивных частиц

в одну векторную (см. рис. 10). Она отличается от последней лишь видом крайне левой вершины, отмеченной на рисунке крестиком. Из этой вершины выходят одна векторная и одна фиктивная линии, а производные отсутствуют. Формально диаграмма на рис. 11, *a* имеет индекс нуль, однако по тем же причинам, что и выше, фактический индекс на единицу меньше, и расходимость отсутствует.

Таким образом, правая часть равенства (7.25) конечна, и следовательно, конечна и функция $\partial_\mu^x G_{\mu\nu\rho}^{abc}(x, y, z)$ в третьем порядке по g ... Поэтому конечна и дивергенция собственной вершинной функции $\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}$

$$(k + p)_\mu \Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}(k, p) < \infty. \quad (7.26)$$

Расходящаяся часть $\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}(k, p)$ может быть лишь полиномом не выше первого порядка. Условие (7.26) означает, что этот полином тождественно равен нулю, и следовательно, функция $\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}(k, p)$ в третьем порядке по g конечна. Для устранения расходимости из вершинной функции $\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}$ нам не понадобилось вводить независимую константу перенормировки z_1 . Эта функция автоматически оказывается конечной, если $z_1 = \tilde{z}_1 \tilde{z}_2^{-1} z_2$.

Доказательство конечности вершинных функций произвольного порядка проводится совершенно аналогично.

Рассмотрим функционал F , стоящий в правой части уравнения (7.20). Его связная часть представляется диаграммами, изображенными на рис. 12. Пусть все диаграммы, участвующие в разложении этого функционала, конечны вплоть до порядка n . Для доказательства конечности функционала F в $(n + 1)$ -порядке достаточно рассмотреть диаграммы на рис. 12, в которых отсутствуют вставки во внешние линии, причем, по предположению, все подграфы конечны.

Диаграммы на рис. 12 имеют структуру, аналогичную диаграммам, изображающим функции Грина $G(x, y, J)$ с двумя внешними фиктивными линиями и произвольным числом внешних векторных линий. Они отличаются лишь видом вершины, отмеченной крестиком. Из этой вершины выходят одна векторная и одна фиктивная линии, а производные отсутствуют.

Поэтому индекс диаграмм на рис. 12 такой же, как у соответствующих диаграмм для $G(x, y, J)$. Диаграмма с двумя внешними линиями имеет индекс единица. По соображениям лоренц-инвариантности соответствующее аналитическое выражение имеет вид

$$\int J_{\mu}^{\text{tr}}(y) \Phi_{\mu}(y - x) dy = \int J_{\mu}^{\text{tr}}(y) \partial_{\mu} \Phi(y - x) dy = 0.$$

Диаграмма с тремя внешними линиями имеет индекс 0 и в принципе логарифмически расходится. Остальные диаграммы имеют отрицательный индекс. Дословно повторяя рассуждения, проведенные выше для

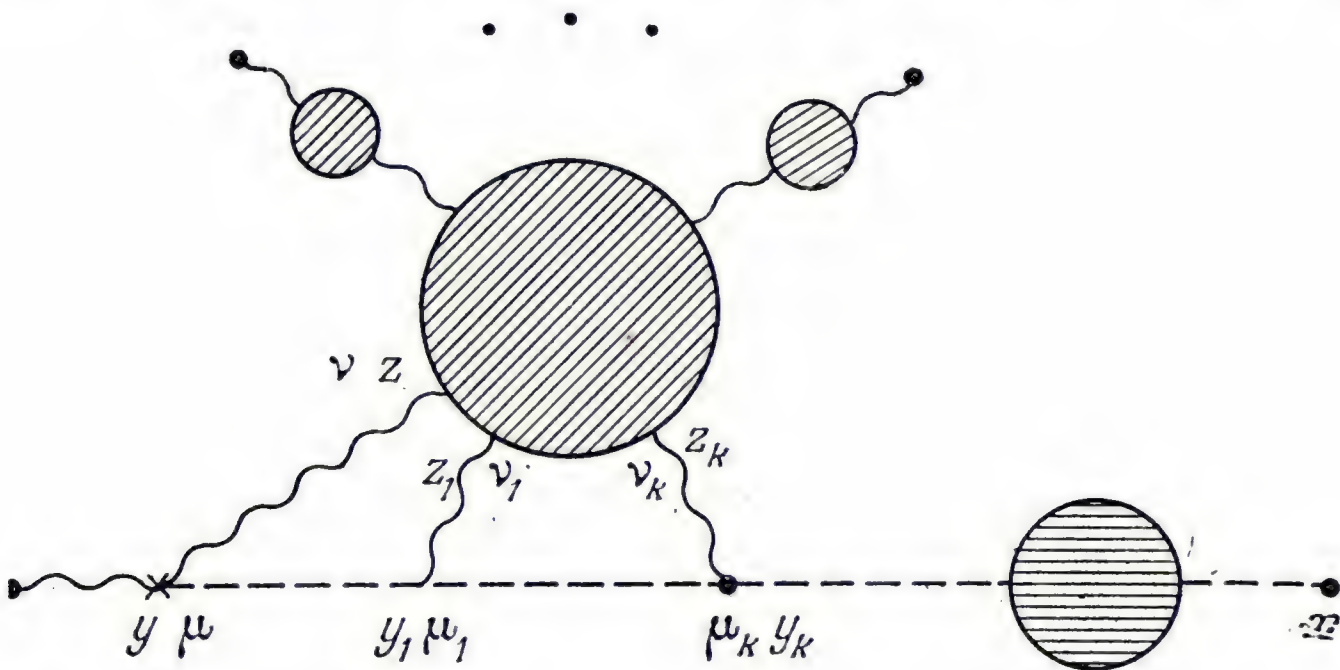


Рис. 12. $\bullet \sim$ обозначает внешний классический источник J_{μ} .

диаграммы третьего порядка, убеждаемся, что логарифмические расходимости в диаграммах на рис. 12, а также в диаграммах, отвечающих вершинной функции $\Gamma_{\text{сс}\mathcal{A}}^{-}$, в действительности отсутствуют.

Таким образом, из предположения о сходимости интегралов, отвечающих диаграммам порядка n , следует конечность функционала F до порядка $n + 1$ включительно. Это означает, что сходятся также все интегралы, участвующие в разложении функционала, стоящего в левой части уравнения (7.20), т. е. конечны все функции Грина

$$\begin{aligned} \partial_{\mu_1}^{x_1} \left\{ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_{\mu_1}^{a_1}(x_1)} \cdots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_{\mu_m}^{a_m}(x_m)} \right\} Z_R = \\ = \partial_{\mu_1}^{x_1} G_{\mu_1}^{a_1} \cdots \mu_m^{a_m}(x_1 \cdots x_m). \end{aligned} \quad (7.27)$$

Фурье-образы функции $G_{\mu_1 \dots \mu_m}^{a_1 \dots a_m}$ связаны с вершинными функциями $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{a_1 \dots a_m}$ соотношением

$$G_{\mu_1 \dots \mu_m}^{a_1 \dots a_m}(k_1 \dots k_m) = \\ = G_{\mu_1 \nu_1}^{a_1 b_1}(k_1) \dots G_{\mu_m \nu_m}^{a_m b_m}(k_m) \Gamma_{\nu_1 \dots \nu_m}^{b_1 \dots b_m}(k_1 \dots k_m). \quad (7.28)$$

Все двухточечные функции $G_{\mu_i \nu_i}^{a_i b_i}$ обратимы и имеют по g порядок $\leq n$. Поэтому из конечности функций (7.27) следует

$$k_{\mu_1} \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{a_1 \dots a_m}(k_1 \dots k_m) = \varphi(k_1 \dots k_m) < \infty. \quad (7.29)$$

Вершинным функциям $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{a_1 \dots a_m}$ соответствуют, вообще говоря, как сильно, так и слабо связанные диаграммы. Слабо связанным диаграммам отвечают коэффициентные функции, представимые (в импульсном представлении) в виде произведения коэффициентных функций меньшего порядка, которые, по предположению, конечны. Поэтому можно считать, что равенство (7.29) справедливо для собственных вершинных функций порядка $n + 1$.

Если собственная вершинная функция имеет индекс 0 или 1, то ее расходящаяся часть может быть лишь полиномом не выше первого порядка. Условие (7.29) означает, что этот полином тождественно равен нулю, и следовательно, все функции $\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_m}^{a_1 \dots a_m}(k_1 \dots k_m)$ конечны. Исключение могут составлять лишь двухточечные функции Грина поля Янга — Миллса и поля фиктивных s -частиц. Последняя вообще не участвует в разложении (7.27) и поэтому на нее не возникает никаких ограничений.

Что касается двухточечной функции Грина поля Янга — Миллса, то поскольку ей соответствуют диаграммы с индексом 2, расходящаяся часть $\Gamma_{\mu_1 \mu_2}^{a_1 a_2}(k)$ может быть полиномом второго порядка. Условие (7.29) не достаточно для обращения в нуль полинома второго порядка. Оно не накладывает никаких ограничений на его поперечную часть

$$\text{const}(g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu). \quad (7.30)$$

Однако в нашем распоряжении есть еще два произвольных контрчлена порядка $n + 1$: $z_2^{(n+1)}$, $\tilde{z}_2^{(n+1)}$. Этих контрчленов достаточно, чтобы устранить расходимости из двухточечных функций Грина. Таким образом, все диаграммы $n + 1$ -порядка конечны. Индукция закончена.

Пусть теперь поле Янга — Миллса взаимодействует еще со скалярными и спинорными полями. Соответствующие лагранжианы даются формулами (I.3.1,11). Диаграммная техника, помимо уже обсуждавшихся элементов, содержит теперь скалярные и спинорные линии, которым соответствуют функции Грина $D(p)$ и $S(p)$ с асимптотиками p^{-2} и p^{-1} соответственно, вершины с двумя спинорными и одной векторной линией без производных, вершины с двумя скалярными и одной векторной линией с одной производной и вершины с двумя векторными и двумя скалярными линиями без производных. Индекс диаграммы с L_{ex}^A внешних векторных линий, L_{ex}^c фиктивных, L_{ex}^φ скалярных и L_{ex}^ψ спинорных внешних линий равен

$$\omega = 4 - L_{\text{ex}}^A - L_{\text{ex}}^c - L_{\text{ex}}^\varphi - \frac{3}{2} L_{\text{ex}}^\psi. \quad (7.31)$$

Помимо уже перечисленных выше диаграмм, неотрицательный индекс имеют диаграммы, изображенные на рис. 13. Диаграмма собственной энергии скалярного поля (с) расходится квадратично, диаграммы a , d — линейно, остальные диаграммы расходятся логарифмически.

Соответствующие собственные вершинные функции имеют вид (мы опять для определенности выписываем формулы для случая группы SU_2)

$$\begin{aligned} \Gamma_{\bar{\psi}\psi} &= (d_1 + \gamma_\mu p_\mu d_2) \delta^{ab} + \dots, \\ \Gamma_{\varphi\varphi} &= (d_3 + d_4 p^2) \delta^{ab} + \dots, \\ \Gamma_{\bar{\psi}\psi A} &= d_5 \gamma_\mu \epsilon^{abc} + \dots, \\ \Gamma_{\varphi\varphi A} &= i d_6 \epsilon^{abc} (k - q)^\mu + \dots, \\ \Gamma_{\varphi\varphi AA} &= d_7 g_{\mu\nu} (\delta^{ab} \delta^{cd} - \delta^{ac} \delta^{bd}) + \\ &\quad + d_8 g_{\mu\nu} (\delta^{ab} \delta^{cd} + \delta^{ac} \delta^{bd}) + \dots, \\ \Gamma_{\varphi^4} &= d_9 (\delta^{ab} \delta^{cd} + \delta^{ac} \delta^{bd} + \delta^{ad} \delta^{bc}) + \dots, \end{aligned} \quad (7.32)$$

где ... обозначают члены, стремящиеся при снятии регуляризации к определенному пределу. Так же как и в случае поля Янга — Миллса, в пустоте число возможных контрчленов значительно больше, чем число параметров в перенормированных лагранжианах.

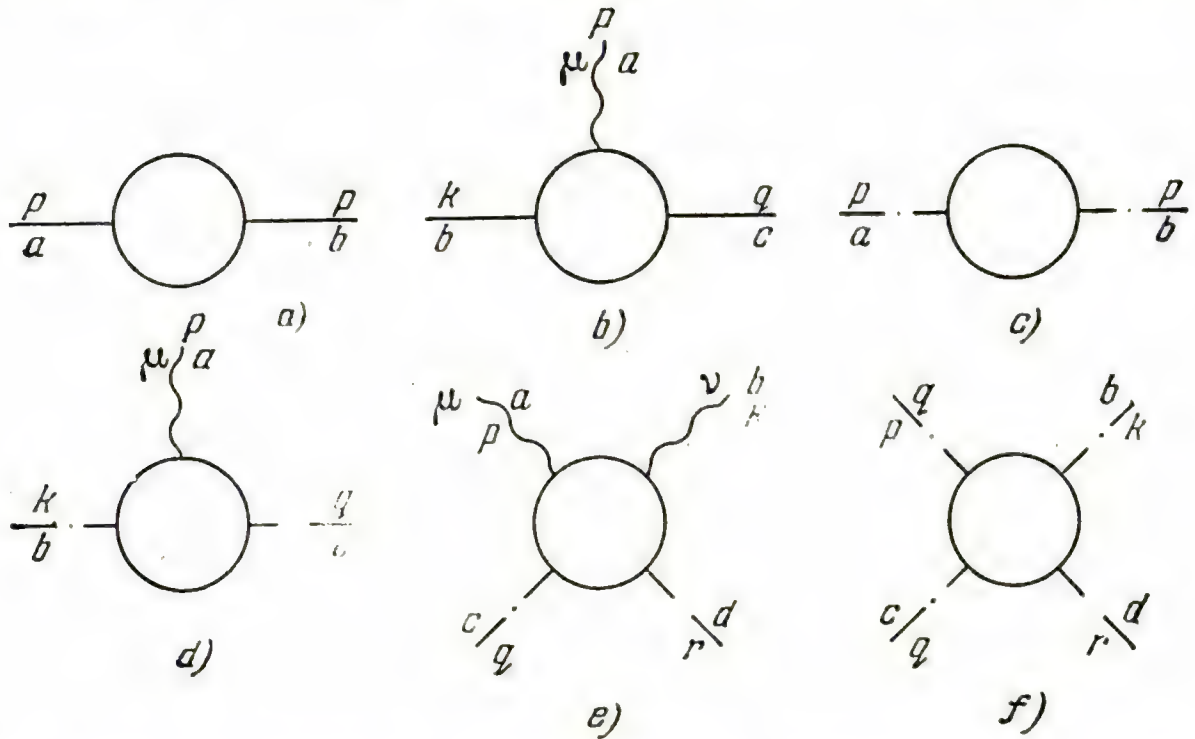


Рис. 13. Дополнительные расходящиеся диаграммы в теории поля Янга — Миллса, взаимодействующего с спинорными и скалярными полями. Сплошная линия обозначает функцию распространения спинорной частицы, штрихпунктирная — скалярной частицы.

Наиболее общее выражение для калибровочно-инвариантного перенормированного лагранжиана строится так же, как и раньше, и имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^R = & \mathcal{L}_{YM}^R + iz_{2\psi} \bar{\psi} \gamma_\mu (\partial_\mu - z_{2\psi}^{-1} z_{1\psi} g A_\mu^a \Gamma(T^a)) \psi - \\ & - z_{2\psi} (m + d) \bar{\psi} \psi + \frac{1}{2} z_{2\varphi} (\partial_\mu \varphi - z_{1\varphi} z_{2\varphi}^{-1} g A_\mu^a \Gamma(T^a) \varphi)^2 - \\ & - \frac{z_{2\varphi}}{2} (m^2 + f) \varphi^2 + z\lambda (\varphi^2)^2, \end{aligned} \quad (7.33)$$

где $\mathcal{L}_{YM}^R$ — перенормированный лагранжиан поля Янга — Миллса в пустоте (7.13).

Калибровочная инвариантность требует, чтобы константы $z_{2\psi}^{-1} z_{1\psi} g$ и $z_{2\varphi}^{-1} z_{1\varphi} g$, участвующие в ковариантных производных спинорных и скалярных полей, совпадали с соответствующей константой $\tilde{g} = z_2^{-1} z_1 g$, фигурирующей в лагранжиане поля Янга — Миллса

$$z_{2\psi}^{-1} z_{1\psi} = z_{2\varphi}^{-1} z_{1\varphi} = z_2^{-1} z_1. \quad (7.34)$$

Как и раньше, условия $z_{2\psi} = z_{1\psi}$, $z_{2\varphi} = z_{1\varphi}$ не являются необходимыми. Калибровочная инвариантность не накладывает никаких ограничений на контрчлены d и f , перенормирующие массы полей и контрчлен $z\lambda(\varphi^2)^2$. Постоянные $z_{2\psi}$ и $z_{2\varphi}$ будем выбирать из условия конечности двухточечных функций Грина спинорных и скалярных полей.

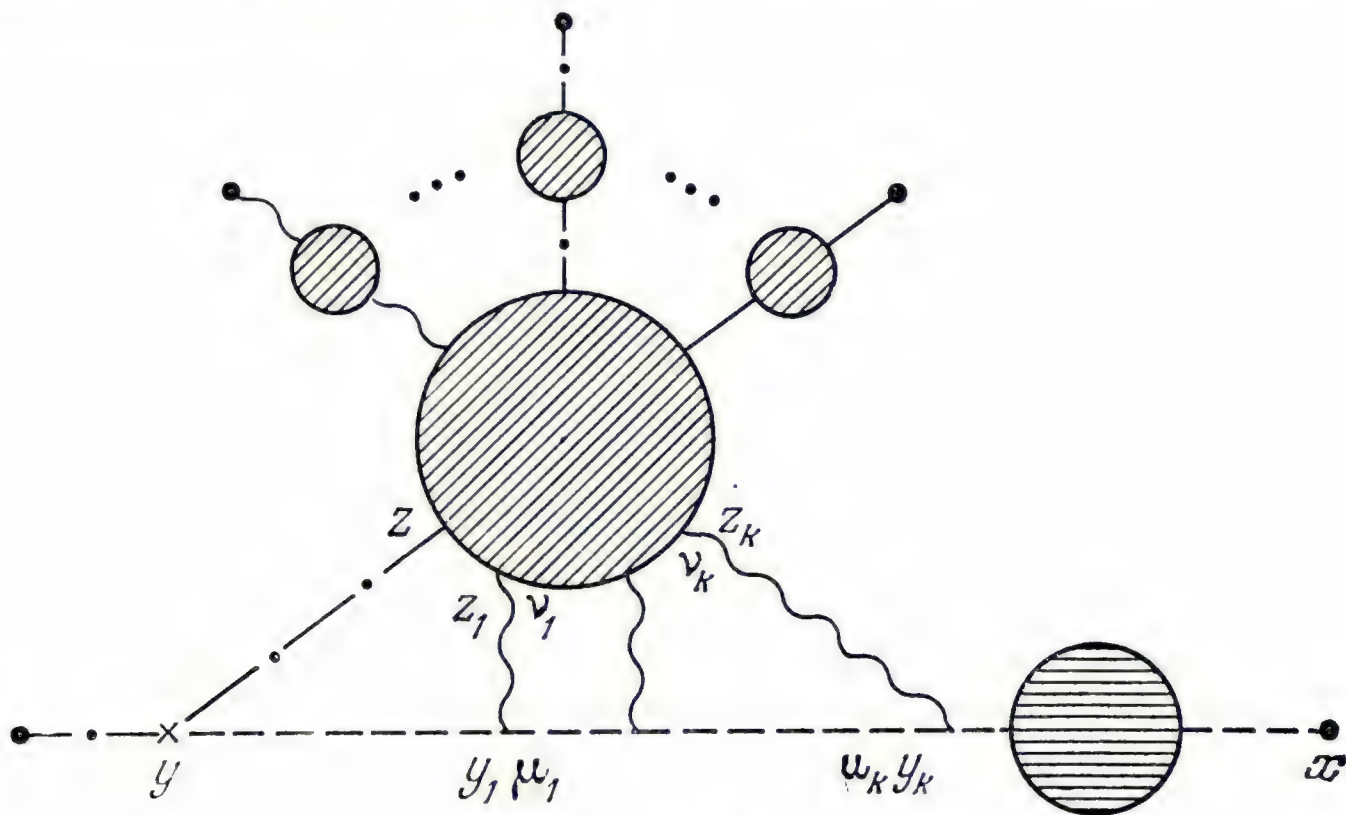


Рис. 14.

Если выполнено условие (7.34), то функции Грина, порождаемые лагранжианом (7.33), удовлетворяют обобщенным тождествам Уорда (6.26), с очевидной заменой $g \rightarrow \tilde{g}$. Доказательство конечности функций Грина дословно повторяет рассуждения, проведенные выше.

Единственное отличие состоит в том, что функционал F , стоящий в правой части (7.20), содержит дополнительные члены

$$\tilde{z}_1 g \int \xi^b(y) (\Gamma^d)^{bc} \left[\frac{1}{i} \frac{\delta G_{yx}^{da}}{\delta \xi^c(y)} \right] dy + \dots, \quad (7.35)$$

где ... обозначает аналогичные члены для спинорных полей. Соответствующие диаграммы изображены на рис. 14. Конечность этих диаграмм доказывается точно так же, как и конечность диаграмм на рис. 12.

Все остальные рассуждения полностью идентичны аналогичным рассуждениям для поля Янга — Миллса в пустоте.

Таким образом, для устранения всех ультрафиолетовых расходимостей и в этом случае достаточно калибровочно-инвариантных контрчленов.

Никаких принципиально новых моментов не возникает и в теории со спонтанно нарушенной симметрией. Описанная выше схема доказательства перенормируемости остается неизменной.

Рассмотрим, например, модель (I.3.25). Наиболее общий вид допустимого перенормированного лагранжиана можно получить следующим образом. В соответствии с описанной выше процедурой в лагранжиан (I.3.25) вводятся допустимые контрчлены

$$\mathcal{L}' = z_{2\varphi} \left| \left(\partial_\mu \varphi^+ - i z_{1\varphi} z_{2\varphi}^{-1} g \frac{\tau^a}{2} A_\mu^a \varphi^+ \right) \right|^2 - z \lambda^2 (\varphi^+ \varphi - \mu^2 + \delta\mu^2)^2 + \mathcal{L}_{YM}^R. \quad (7.36)$$

Константы $z_{2\varphi}$, $z_{1\varphi}$ удовлетворяют условиям (7.34). Переходя к сдвинутым полям B^a , σ , определяемым формулой (6.31), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R = & \frac{z_{1\varphi}^2 z_{2\varphi}^{-1}}{2} m_1^2 A_\mu^2 + z_{1\varphi} m_1 A_\mu^a \partial_\mu B^a + \frac{1}{2} z_{2\varphi} \partial_\mu B^a \partial_\mu B^a + \\ & + \frac{1}{2} z_{2\varphi} \partial_\mu \sigma \partial_\mu \sigma - \frac{m_2^2}{2} \sigma^2 - \frac{z m_2^2}{m_1^2} \frac{g^2}{8} \delta\mu^2 (B^2 + \sigma^2) + \\ & - \frac{z m_2^2}{m_1} \frac{g}{2} \delta\mu^2 \sigma + z_{1\varphi} \frac{g}{2} A_\mu^a (\sigma \partial_\mu B^a - B^a \partial_\mu \sigma - \varepsilon^{abc} B^b \partial_\mu B^c) + \\ & + z_{1\varphi}^2 z_{2\varphi}^{-1} \left[\frac{m_1 g}{2} \sigma A_\mu^2 + \frac{g^2}{8} (\sigma^2 + B^2) A_\mu^2 \right] - \\ & - \frac{z g m_2^2}{4 m_1} \sigma (\sigma^2 + B^2) - \frac{z g^2 m_2^2}{32 m_1^2} (\sigma^2 + B^2)^2. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Перенормированный лагранжиан Янга — Миллса (7.13), включающий также взаимодействие с фиктивными частицами, остается неизменным, и мы его не выписываем.

При переходе к формуле (7.37) мы сделали сдвиг полей φ на величину, равную вакуумному среднему поля φ без учета радиационных поправок. Поэтому в лагранжиане (7.37) присутствуют контрчлены, линейные по полю σ , компенсирующие расходимости в диаграммах типа «головастиков» (рис. 15), а также контрчлен пере-

нормировки массы голдстоуновских полей B^a . Эти контрчлены необходимы для того, чтобы обеспечить устойчивость основного состояния при учете радиационных поправок.

Лагранжиан (7.36) инвариантен относительно калибровочных преобразований (6.32) с заменой

$$m_1 \rightarrow \tilde{m}_1, \quad g \rightarrow \tilde{g}, \quad \tilde{g} = \tilde{z}_1 \tilde{z}_2^{-1} g, \quad \tilde{m}_1 = \tilde{z}_1 \tilde{z}_2^{-1} m_1. \quad (7.38)$$

Обобщенные тождества Уорда модифицируются так же, как и в симметричном случае

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} f^2(\square) \partial_\mu \left[\frac{1}{i} \frac{\delta Z_R}{\delta J_\mu^a(x)} \right] = & \int \{ D_0(x-y) \partial_\mu J_\mu^a(y) dy \} Z_R + \\ & + \int \left\{ (J_\mu^b)^{\text{tr}}(y) \tilde{z}_1 g \varepsilon^{bcd} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu^c(y)} + \frac{\tilde{z}_1 g}{2} \delta^{bd} \xi_\sigma(y) \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \xi_B^b(y)} - \right. \\ & - \xi_B^b(y) \tilde{z}_1 \left[\frac{g}{2} \varepsilon^{bcd} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \xi_B^c(y)} + \delta^{bd} \frac{g}{2} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \xi_\sigma(y)} + m_1 \delta^{bd} \right] \left. \right\} \times \\ & \times G_R^{da}(J, \xi_B, \xi_\sigma, y, x) dy \quad (7.39) \end{aligned}$$

(напомним, что в рассматриваемых калибровках константа $\tilde{z}_1$ конечна). Доказательство перенормируемости практически дословно повторяет соответствующие рассуждения для симметричного случая. Единственное техническое усложнение состоит в том, что из-за смешивания полей A_μ^a, B^a в калибровке общего вида двухточечные функции Грина представляют собой матрицы (2×2) .

Последнее замечание касается нормировки двухточечных функций Грина. Поскольку в данном случае мы имеем дело с массивными частицами, вычитания можно делать на массовой поверхности. Поэтому мы будем считать, что контрчлены выбраны так, чтобы полюсы полной двухточечной функции Грина σ -частиц и поперечной части функции Грина поля Янга — Миллса совпадали с полюсами соответствующих свободных функций. При этом, однако, мы, вообще говоря, не можем

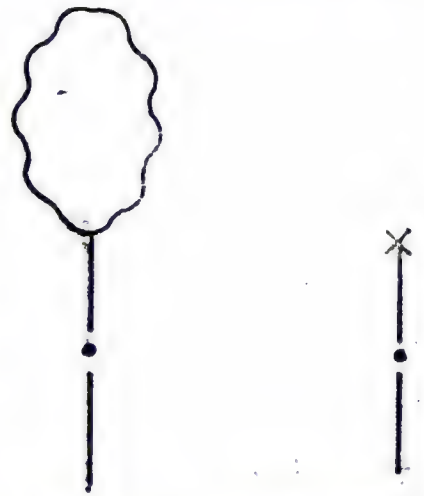


Рис. 15. Диаграммы типа «головастиков» в теории Янга — Миллса со спонтанно нарушенной симметрией.

одновременно обеспечить равенства единице вычетов в соответствующих полюсах. Как видно из формулы (7.3), контрчлены перенормировки масс и волновых функций не являются независимыми. Задав положение полюса функции Грина, мы уже не можем произвольно распоряжаться значением вычета в этом полюсе. Поэтому, чтобы обеспечить правильную нормировку одночастичных состояний, необходимо сделать еще дополнительную конечную перенормировку.

§ 8. Перенормированная S -матрица

Мы показали, что процедуру перенормировки можно осуществить, не нарушив калибровочной инвариантности теории. Докажем теперь, что перенормированная теория удовлетворяет принципу относительности, т. е. вероятности физических процессов не зависят от конкретного выбора калибровочного условия. Тем самым будет доказана унитарность перенормированной S -матрицы.

В этом параграфе мы будем рассматривать модели со спонтанно нарушенной симметрией, в которых все физические частицы имеют ненулевые массы. Формально все рассуждения переносятся и на симметричную теорию, однако в этом случае, как уже отмечалось, матричные элементы на массовой поверхности содержат дополнительные инфракрасные сингулярности. Поэтому в рамках теории возмущений S -матрица в симметричной теории, строго говоря, не существует.

Итак, рассмотрим перенормированный производящий функционал для функций Грина, который можно записать в виде

$$Z(J_\mu, \xi_\sigma) = N^{-1} \int \exp \left\{ i \int [\mathcal{L}_R + J_\mu^a A_\mu^a + \xi_\sigma \sigma] dx \right\} \times \\ \times \Delta(\mathcal{A}) \prod_x \delta(\partial_\mu \mathcal{A}_\mu) d\mathcal{A} d\sigma d\mathcal{B}. \quad (8.1)$$

Здесь $\mathcal{L}_R$ — перенормированный калибровочно-инвариантный лагранжиан поля Янга — Миллса, взаимодействующего с полями материи. (Для определенности мы рассматриваем лагранжиан (7.36).) Источник J_μ^a будем считать поперечным

$$\partial_\mu J_\mu^a = 0. \quad (8.2)$$

Матричные элементы S-матрицы выражаются через вариационные производные Z по формулам приведения

$$\begin{aligned}
 S_{i_1 \dots i_n, j_1 \dots j_m} (k'_1 \dots k'_n, p'_1 \dots p'_l; k_1 \dots \\
 \dots k_m, p_1 \dots p_q) V^{\frac{n+m}{2}} W^{\frac{l+q}{2}} = \\
 = (k_1'^2 - m_1^2) \dots (k_n'^2 - m_1^2) (p_1'^2 - m_2^2) \dots \\
 \dots (p_l'^2 - m_2^2) (k_1^2 - m_1^2) \dots (k_m^2 - m_1^2) (p_1^2 - m_2^2) \dots \\
 \dots (p_q^2 - m_2^2) \theta(k'_{10}) \dots \theta(k'_{n0}) \theta(-k_{10}) \dots \theta(-k_{m0}) \theta(p'_{10}) \dots \\
 \dots \theta(p'_{l0}) \theta(-p_{10}) \dots \theta(-p_{q0}) \times \\
 \times u_{\mu_1}^{i_1} \dots u_{\mu_n}^{i_n} G_{\mu_1 \dots \mu_n \nu_1 \dots \nu_m} (k'_1 \dots p_q) \times \\
 \times u_{\nu_1}^{j_1} \dots u_{\nu_m}^{j_m} \Big|_{p^2=p'^2=m_1^2; k^2=k'^2=m_1^2}. \quad (8.3)
 \end{aligned}$$

Здесь k, k' обозначает импульсы векторных частиц, p, p' — импульсы скалярных частиц. Постоянные V и W являются нормирующими множителями

$$\begin{aligned}
 \delta^{ab} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \cdot V \Big|_{k^2=m_1^2} = \\
 = (k^2 - m_1^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \int e^{ikx} \frac{\delta^2 Z}{\delta J_\mu^a(x) \delta J_\nu^b(0)} \Big|_{J, \xi=0} dx, \quad (8.4)
 \end{aligned}$$

$$W \Big|_{p^2=m_2^2} = (p^2 - m_2^2) \int e^{ipx} \frac{\delta^2 Z}{\delta \xi_\sigma(x) \delta \xi_\sigma(0)} \Big|_{J, \xi=0} dx. \quad (8.5)$$

Если двухточечная функция Грина нормирована на массовой поверхности на единицу

$$(p^2 - m^2) G(p^2) = 1, \quad p^2 = m^2, \quad (8.6)$$

то эти множители отсутствуют, и мы возвращаемся к формуле (3.64).

Вычисленные в лоренцевой калибровке матричные элементы (8.3) при снятии промежуточной регуляризации стремятся к определенному конечному пределу. Покажем, что в действительности значения матричных

элементов (8.3) не зависят от конкретного выбора калибровочного условия.

Перейдем в выражении (8.1) для производящего функционала $Z(J, \zeta_\sigma)$ от лоренцевой калибровки к унитарной калибровке

$$B^a = 0. \quad (8.7)$$

Инвариантность перенормированного лагранжиана $\mathcal{L}_R$ позволяет воспользоваться для этого тем же приемом, который мы использовали в главе II.

Вводя калибровочно-инвариантный функционал $\Delta'(\sigma, B, \tilde{g})$, определенный равенством

$$\Delta'(\sigma, \mathcal{B}, \tilde{g}) \int \delta(\mathcal{B}^\omega) \prod_x d\omega = 1, \quad (8.8)$$

где

$$\mathcal{B}^\omega = \mathcal{B} - \tilde{m}_1 u - \frac{\tilde{g}}{2} [\mathcal{B}, u] - \frac{\tilde{g}}{2} \sigma u + O(u^2), \quad (8.9)$$

можно переписать функционал $Z(J, \zeta)$ в виде

$$\begin{aligned} Z(J_\mu, \zeta) = N^{-1} \int \exp \left\{ i \int [\mathcal{L}_R + J_\mu^a A_\mu^a + \zeta_\sigma \sigma] dx \right\} \Delta(\tilde{g}, \mathcal{A}) \times \\ \times \prod_x \delta(\partial_\mu \mathcal{A}_\mu) \Delta'(\mathcal{B}, \tilde{g}, \sigma) \delta(\mathcal{B}^\omega) d\omega d\mathcal{A} d\sigma d\mathcal{B}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Переходя к новым переменным

$$\mathcal{A}_\mu \rightarrow \mathcal{A}_\mu^\omega, \quad \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^{\omega^{-1}}, \quad \sigma \rightarrow \sigma^{\omega^{-1}}, \quad \omega^{-1} \rightarrow \omega \quad (8.11)$$

и интегрируя по ω , получаем в полной аналогии с результатами главы II

$$\begin{aligned} Z(J, \zeta) = N^{-1} \int \exp \left\{ i \int [\mathcal{L}_R + J_\mu^a (\mathcal{A}_\mu^\omega)^a + \zeta_\sigma \sigma^\omega] dx \right\} \times \\ \times \Delta'(\sigma, \mathcal{B}, \tilde{g}) \prod_x \delta(\mathcal{B}) d\mathcal{A} d\sigma d\mathcal{B}, \end{aligned} \quad (8.12)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu^\omega = \mathcal{A}_\mu + \delta \mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu u - \tilde{g} [\mathcal{A}_\mu, u] + O(u^2), \\ \sigma^\omega = \sigma + \delta \sigma = \sigma - \frac{\tilde{g}}{2} (\mathcal{B} u) + O(u^2), \end{aligned} \quad (8.13)$$

а функция u определяется из уравнения

$$\partial_\mu \mathcal{A}_\mu^\omega = \square u - \tilde{g} \partial_\mu [\mathcal{A}_\mu, u] + \partial_\mu \mathcal{A}_\mu + \dots = 0. \quad (8.14)$$

Значение функционала $\Delta'(\sigma, \mathcal{B}, \tilde{g})$ на поверхности $\mathcal{B} = 0$ равно

$$\Delta'(\sigma, \mathcal{B}, \tilde{g})_{\mathcal{B}=0} = \det \left| \tilde{m}_1 + \frac{\tilde{g}\sigma(x)}{2} \right|^3 = \text{const} \det \left| m_1 + \frac{g\sigma(x)}{2} \right|^3. \quad (8.15)$$

Функционал (8.12) отличается от производящего функционала для функций Грина в унитарной калибровке лишь видом членов с источниками. Покажем, что при подстановке в редукционную формулу (8.3) это различие исчезает, т. е. перенормированные матричные элементы не меняются при замене

$$J_\mu^a (\mathcal{A}_\mu^\omega)^a \rightarrow J_\mu^a \mathcal{A}_\mu^a, \quad \zeta_\sigma \sigma^\omega \rightarrow \zeta_\sigma \sigma. \quad (8.16)$$

Вариационные производные функционала (8.12) выражаются через функции Грина вида:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{i} \right)^{m+q} \frac{\delta^{(m+q)} Z}{\delta J_{\mu_1}^{a_1}(x_1) \dots \delta J_{\mu_m}^{a_m}(x_m) \delta \zeta(y_1) \dots \delta \zeta(y_q)} \Big|_{J, \zeta=0} = \\ & = N^{-1} \int \exp \left\{ i \int [\mathcal{L}_R] dx \right\} \Delta'(\sigma, \mathcal{B}, \tilde{g}) (\mathcal{A}_{\mu_1}^\omega)^{a_1}(x_1) \dots \\ & \dots (\mathcal{A}_{\mu_m}^\omega)^{a_m}(x_m) \sigma^\omega(x_1) \dots \sigma^\omega(x_q) \prod_x \delta(\mathcal{B}) d\mathcal{A} d\sigma d\mathcal{B}, \end{aligned} \quad (8.17)$$

где $\mathcal{A}_\mu^\omega$, σ^ω определяются формулами (8.13). Поскольку источники J_μ считаются поперечными, линейный член $\partial_\mu u$ не дает вклада и разложение в ряд теории возмущений $\delta \mathcal{A}_\mu$ и $\delta \sigma$ начинается с членов, квадратичных по полям.

Функциям Грина (8.17) соответствуют диаграммы, изображенные на рис. 16.

Диаграммы типа (a) и (b) содержат полюсы по всем переменным p_i , k_j . Диаграммы типа (c) являются одночастично неприводимыми, по крайней мере по одному из импульсов p_i , k_j . (На рисунке изображена диаграмма, одночастично неприводимая по импульсу p_1 . Это значит, что ее нельзя разбить на две части, связанные лишь одной линией, по которой распространяется импульс p_1). Из исследования аналитических свойств

диаграмм Фейнмана известно, что одночастично неприводимые диаграммы не имеют полюсных особенностей

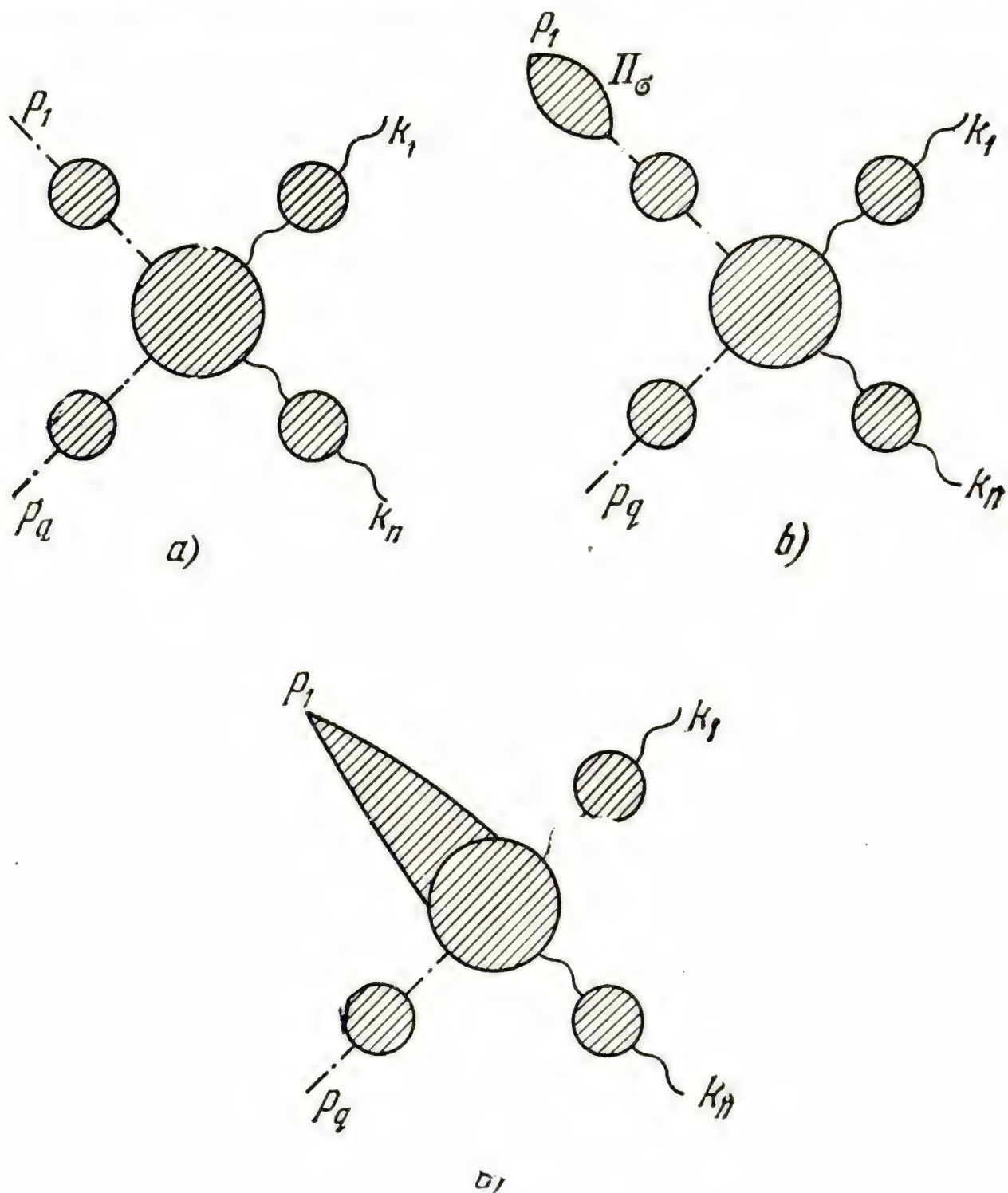


Рис. 16.

по соответствующим переменным. Поэтому если коэффициентные функции, отвечающие диаграмме (c), умножить на произведение

$$\prod_i (k_i^2 - m_1^2) \prod_j (p_j^2 - m_2^2) \quad (8.18)$$

и положить $k_i^2 = m_1^2$, $p_j^2 = m_2^2$, то это выражение обратится в нуль.

Диаграммы типа (b) получаются из диаграмм (a) путем вставок во внешние линии блоков, обозначенных на рис. 16 буквами $\Pi_{\mathcal{A}}$, Π_{σ} . На массовой поверхности

это эквивалентно умножению соответствующих функций Грина на константы, равные значениям функций $\Pi_A(k^2)$, $\Pi_\sigma(p^2)$ в точках $k^2 = m_1^2$, $p^2 = m_2^2$. Значения функций Грина с m внешними векторными и q внешними скалярными линиями на массовой поверхности при переходе

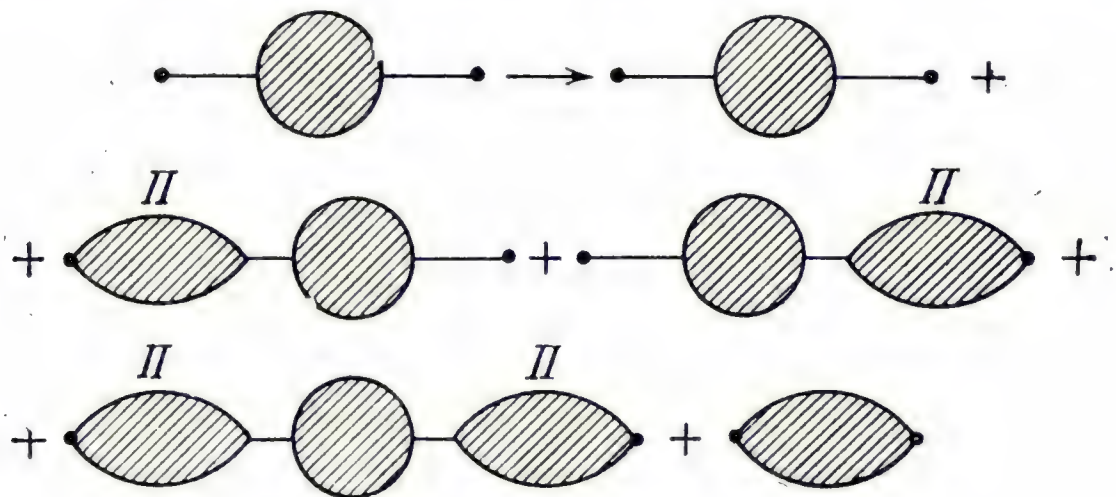


Рис. 17.

от одной калибровки к другой меняются следующим образом

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^m (k_i^2 - m_1^2) \prod_{j=1}^q (p_j^2 - m_2^2) G_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(u) a_1 \dots a_m}(k_1, \dots, k_m, p_1, \dots, p_q) = \\ & = (1 + \Pi_{\mathcal{A}}(m_1^2))^n (1 + \Pi_\sigma(m_2^2))^m \prod_{i=1}^n (k_i^2 - m_1^2) \prod_{j=1}^q (p_j^2 - m_2^2) \times \\ & \times G_{\mu_1 \dots \mu_m}^{(L) a_1 \dots a_m}(k_1, \dots, k_m, p_1, \dots, p_q) \Big|_{\substack{k_i^2 = m_1^2 \\ p_j^2 = m_2^2}} \quad (8.19) \end{aligned}$$

Здесь $G^{(u)}$ — функция Грина в унитарной калибровке, а $G^{(L)}$ в лоренцевой калибровке. Очевидно, что совершенно аналогичная формула связывает функции Грина и в других калибровках.

Для двухточечной функции Грина соответствующее преобразование изображено графически на рис. 17. Значения двухточечных функций Грина на массовой поверхности в различных калибровках связаны соотношением

$$\begin{aligned} (k^2 - m_1^2) G_{\mu\nu}^{(L) ab}(k) &= (1 + \Pi_{\mathcal{A}}(m_1^2))^2 (k^2 - m_1^2) G_{\mu\nu}^{(u) ab}(k), \\ (p^2 - m_2^2) G_\sigma^{(L)}(p) &= (1 + \Pi_\sigma(m_2^2))^2 (p^2 - m_2^2) G_\sigma^{(u)}(p). \end{aligned} \quad (8.20)$$

Возвращаясь к формуле (8.3) видим, что при переходе к унитарной калибровке фурье образы функций Грина с m векторными и q скалярными внешними линиями умножаются на

$$(1 + \Pi_{\mathcal{A}}(m_1^2))^m (1 + \Pi_{\sigma}(m_2^2))^q, \quad (8.21)$$

но одновременно нормирующие константы V и W умножатся на $(1 + \Pi_{\mathcal{A}}(m_1^2))^2$ и $(1 + \Pi_{\sigma}(m_2^2))^2$ соответственно. В результате выражение для перенормированного матричного элемента остается неизменным.

Из этих рассуждений, являющихся по сути дела аналогом известной в аксиоматической квантовой теории теоремы Борхерса, следует, что перенормированная S -матрица не зависит от конкретного выбора калибровочного условия и, следовательно, перенормированная теория удовлетворяет принципу относительности.

В калибровке $\mathcal{B} = 0$ перенормированный лагранжиан имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R = \mathcal{L}_{YM}^R + \\ + \left\{ \frac{z_{1\varphi}^2 z_{2\varphi}^{-1}}{2} m_1^2 A_\mu^2 + \frac{1}{2} z_{2\varphi} \partial_\mu \sigma \partial_\mu \sigma - \frac{(m_2^2 + \delta m_2^2) \sigma^2}{2} - \frac{2\delta m_2^2 m_1}{g} \sigma + \right. \\ \left. + \frac{m_1 g}{2} z_{1\varphi}^2 z_{2\varphi}^{-1} \sigma A_\mu^2 + \frac{z_{1\varphi} z_{2\varphi}^{-1}}{8} g^2 \sigma^2 A_\mu^2 - \frac{z g m_2^2}{4m_1} \sigma^3 - \frac{z g^2 m_2^2}{32m_1^2} \sigma^4 \right\}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Все нефизические частицы (голдстоуновские бозоны, фиктивные s -частицы, продольные кванты векторного поля) отсутствуют и унитарность матрицы рассеяния очевидна. При этом в силу независимости S -матрицы от калибровки матричные элементы на массовой поверхности при снятии регуляризации стремятся к определенному пределу. Заметим, что для функций Грина вне массовой поверхности порождаемых лагранжианом (8.22) это неверно. Свободная функция Грина векторного поля, отвечающая лагранжиану (8.22), имеет вид

$$D_{\mu\nu} = \frac{-1}{(2\pi)^4} \frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu m_1^{-2}}{k^2 - m_1^2}, \quad (8.23)$$

и при $k \rightarrow \infty$ стремится к константе. Вычисляя индекс расходимости диаграммы, содержащей n_3 тройных век-

торных вершин, n_4 четверных вершин и L_{ex} внешних векторных линий, находим

$$\omega = 4 + 4n_4 + 2n_3 - 2L_{ex}; \quad (8.24)$$

с ростом n_i число типов расходящихся диаграмм неограниченно возрастает, т. е. вне массовой поверхности. Теория неперенормируема. Тем не менее для устранения расходимостей из матричных элементов на массовой поверхности достаточно конечного числа контрчленов, явно выписанных в формуле (8.22). Калибровочная инвариантность приводит к физической эквивалентности явно перенормируемой и явно унитарной калибровок, благодаря чему перенормированная S-матрица обладает обоими этими свойствами.

Очевидно, что все эти выводы не зависят от конкретного вида модели (8.22) и в равной мере относятся и к модели (I.3.13), а также к моделям, включающим дополнительное калибровочно-инвариантное взаимодействие фермионов. Существенна лишь калибровочная инвариантность перенормированного лагранжиана.

В заключение этого параграфа мы вернемся к вопросу о доказательстве конечности функций Грина в перенормируемой калибровке общего вида. До сих пор мы рассматривали либо лоренцеву калибровку, либо калибровки, в которых продольная часть векторной функции Грина быстро убывает при $k \rightarrow \infty$. Покажем теперь, что это условие не является необходимым и контрчлены вида (7.3) обеспечивают конечность функции Грина в любых перенормируемых калибровках, т. е. таких калибровках, для которых продольная часть свободной функции Грина векторного поля убывает при $k \rightarrow \infty$ не медленнее, чем поперечная. Простейшим примером такой калибровки является калибровка с $f(k^2) = 1$.

В любой такой калибровке расходящиеся диаграммы имеют структуру, уже обсуждавшуюся выше; расходиться могут лишь диаграммы с одной, двумя, тремя и четырьмя внешними линиями. Как и раньше, мы можем выбрать константы $z_2, \tilde{z}_2, z_{2\varphi}, z_{2\psi}, \tilde{z}_1, z, \delta m$, таким образом, чтобы сделать конечными все двухточечные функции Грина и вершинные функции $\Gamma_{\bar{c}cA}, \Gamma_{\sigma^4}$, а константы $z_1, z_{1\varphi}, z_{1\psi}$ определим из условия инвариантности

перенормированного действия

$$z_1 z_2^{-1} = \tilde{z}_1 \tilde{z}_2^{-1} = z_{1\varphi} z_{2\varphi}^{-1} = z_{1\psi} z_{2\psi}^{-1}. \quad (8.25)$$

Покажем, что отношения типа

$$\frac{\Gamma_{A^3}}{(\Gamma_{AA})^{3/2}}, \quad \frac{\Gamma_{\bar{\psi}\psi A}}{(\Gamma_{\bar{\psi}\psi})(\Gamma_{AA})^{1/2}}, \quad \text{и т. д.}, \quad (8.26)$$

где все внешние векторные концы считаются поперечными, на массовой поверхности не зависят от калибровки. Действительно, из формул (8.19), (8.20) следует, что при переходе от одной калибровки к другой рассматриваемые функции меняются следующим образом (мы опускаем тензорную структуру):

$$\begin{aligned} \Gamma_{A^3}(k_1, k_2, k_3) &\rightarrow (1 + \Pi_A(m_1^2))^3 \Gamma_{A^3}(k_1, k_2, k_3), \\ \Gamma_{AA}(k) &\rightarrow (1 + \Pi_A(m_1^2))^2 \Gamma_{AA}(k), \quad k_i^2 = m_1^2. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Подставляя эти выражения в формулу (8.26), убеждаемся в инвариантности этого отношения. В лоренцевой калибровке все функции по доказанному выше конечны. Функция Γ_{AA} конечна в силу сделанного выбора констант z_i . Следовательно, в любой калибровке функция $\Gamma_{A^3}(k_1, k_2, k_3)$ при $k_i^2 = m_1^2$ конечна. Поскольку в перенормируемых калибровках эта функция может расходиться лишь логарифмически, отсюда следует конечность Γ_{A^3} при любых k_i .

Совершенно аналогично доказывается конечность всех остальных функций Грина. Подчеркнем, что сейчас речь идет о функциях Грина вне массовой поверхности. На массовой поверхности расходимости отсутствуют в любых калибровках, в том числе и не явно перенормируемых (т. е. таких калибровках, для которых продольная часть функции Грина векторного поля при больших k ведет себя как k^{2n} , $n > -1$).

В перенормируемых калибровках конечное число инвариантных контрчленов обеспечивает существование функций Грина и вне массовой поверхности. При этом конкретные значения контрчленов, разумеется, зависят от выбора калибровки. В частности, в калибровке общего вида константа $\tilde{z}_1$ уже не является конечной.

§ 9. Аномальные тождества Уорда

При построении унитарной перенормированной S -матрицы мы пользовались инвариантной промежуточной регуляризацией. Существование инвариантного регуляризованного действия позволило нам получить обобщенные тождества Уорда и с их помощью доказать физическую эквивалентность унитарной и лоренцевой калибровок. Вообще говоря, использование инвариантной промежуточной регуляризации не является обязательным. В принципе мы могли бы ввести произвольную промежуточную регуляризацию и попытаться подобрать контрчлены таким образом, чтобы перенормированные функции Грина удовлетворяли обобщенным тождествам Уорда. При неинвариантной регуляризации для этого могут понадобиться неинвариантные контрчлены типа перенормировки массы фотона в электродинамике.

В этом случае в регуляризованной теории принцип относительности не выполняется, и вопрос о его справедливости в пределе снятой промежуточной регуляризации нуждается в специальном исследовании. Может оказаться, что ни при каком выборе локальных контрчленов перенормированные функции Грина не удовлетворяют обобщенным тождествам Уорда. Это приводит к неэквивалентности различных калибровок и несогласованности теории. В этом случае не существует (по крайней мере в рамках теории возмущений) унитарная перенормированная S -матрица.

На практике указанная ситуация возникает в тех случаях, когда в калибровочных преобразованиях полей фермионов участвует матрица γ_5 . В этом случае оба описанных выше метода инвариантной регуляризации неприменимы. В рамках размерной регуляризации не удается дать непротиворечивого определения матрицы γ_5 для пространства с произвольным числом измерений. Регуляризация с помощью высших ковариантных производных по-прежнему обеспечивает конечность всех многопетлевых диаграмм, однако инвариантная регуляризация однопетлевых диаграмм с помощью процедуры Паули — Вилларса в этом случае невозможна, поскольку массовые члены для фермионных полей $\mu\bar{\psi}\psi$ нару-

шают γ_5 -инвариантность. Таким образом, для однопетлевых диаграмм не существует γ_5 -инвариантной регуляризации, и, как мы видим, для целого ряда калибровочных групп, включающих γ_5 -преобразования, функции Грина не удовлетворяют обобщенным тождествам Уорда.

В качестве простейшего примера рассмотрим модель с $U(1)$ -калибровочной группой, описываемую лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)^2 + i\bar{\psi}\gamma_\mu'(\partial_\mu - igA_\mu\gamma_5)\psi, \quad (9.1)$$

$$\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3.$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно абелевых калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\lambda(x), \\ \psi(x) &\rightarrow e^{ig\gamma_5\lambda(x)}\psi(x); \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}(x)e^{ig\gamma_5\lambda(x)}, \end{aligned} \quad (9.2)$$

и на первый взгляд все рассуждения относительно эквивалентности различных калибровок в равной мере относятся и к нему. В α -калибровке эффективный лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{L} + \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2, \quad (9.3)$$

где $\mathcal{L}$ — калибровочно-инвариантное выражение (9.1). Лагранжиан (9.3) невырожден, и описывает наряду с поперечно поляризованными квантами векторного поля скалярные кванты со спином нуль.

Можно было бы принять лагранжиан (9.3) за исходный и построить на его основе квантовую теорию. Хорошо известно, что такая теория физически несостоятельна: вероятность событий с участием скалярных квантов может принимать отрицательные значения. Если, однако, функции Грина, порождаемые лагранжианом (9.3), удовлетворяют тождествам Уорда

$$\left\{ \frac{1}{\alpha} \partial_\mu \left(\frac{\delta Z}{\delta J_\mu(x)} \right) - \right.$$

$$\left. - Z \partial_\mu J_\mu(x) + ig\bar{\eta}(x)\gamma_5 \frac{\delta Z}{\delta \bar{\eta}(x)} + ig \frac{\delta Z}{\delta \eta(x)} \gamma_5 \eta(x) \right\} = 0, \quad (9.4)$$

где Z — производящий функционал вида

$$Z = N^{-1} \int \exp \left\{ i \int [\mathcal{L}_s + J_\mu A_\mu + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta] dx \right\} dA d\bar{\psi} d\psi, \quad (9.5)$$

то, как легко показать, матричные элементы перехода между состояниями, содержащими поперечно поляризованные кванты, и состояниями, содержащими скалярные кванты, равна нулю. Это значит, что S -матрица, связывающая «физические», поперечно поляризованные состояния, унитарна. (Строго говоря, в рассматриваемой модели S -матрица не существует из-за инфракрасных расходимостей. Можно показать, однако, что все рассуждения переносятся и на случай, когда векторное поле имеет не нулевую массу и инфракрасные расходимости отсутствуют.)

Тождество (9.4) формально следует из инвариантности лагранжиана (9.1) относительно преобразований (9.2). Его частным случаем является соотношение

$$\partial_{\mu_1}^{x_1} \frac{\delta^n \ln Z}{\delta J_{\mu_1}(x_1) \dots \delta J_{\mu_n}(x_n)} \Big|_{J, \eta=0} = 0, \quad n > 2, \quad (9.6)$$

явно демонстрирующее отсутствие переходов между поперечно и продольно поляризованными состояниями. В действительности нас интересуют не «наивные» тождества (9.4), которые, строго говоря, не имеют смысла из-за расходимости участвующих в них интегралов, а соответствующие соотношения для перенормированных функций Грина. В электродинамике, а также в обсуждавшихся выше неабелевых моделях перенормированные функции Грина удовлетворяют обобщенным тождествам Уорда, отличающимся от «наивных» лишь перенормировкой участвующих в них зарядов и масс. В модели (9.1) это не так. Функция Грина с тремя внешними векторными линиями, соответствующая диаграмме, изображенной на рис. 18, ни при каком выборе локальных контрчленов не удовлетворяет «наивным»

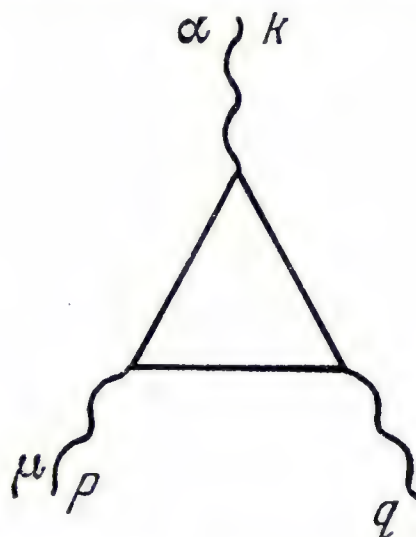


Рис. 18. Аномальная трехугольная диаграмма.

тождествам (9.4). Тождество (9.6) означает, что фурье-образ трехточечной собственной вершиной функции $\Gamma_{\mu\nu\alpha}(p, q)$, определенный равенством

$$\Gamma_{\mu\nu\alpha}(p, q) G_{\mu\mu'}(p) G_{\nu\nu'}(q) G_{\alpha\alpha'}(p + q) = \\ = \int e^{ipx} e^{iqy} \left(\frac{-i\delta^3 Z}{\delta J_{\mu'}(x) \delta J_{\nu'}(y) \delta J_{\alpha'}(0)} \right) dx dy, \quad (9.7)$$

должен быть поперечен:

$$p_\mu \Gamma_{\mu\nu\alpha}(p, q) = q_\nu \Gamma_{\mu\nu\alpha}(p, q) = (p + q)_\alpha \Gamma_{\mu\nu\alpha}(p, q) = 0. \quad (9.8)$$

Явное вычисление $\Gamma_{\mu\nu\alpha}(p, q)$ дает с учетом того, что функция $\Gamma_{\mu\nu\alpha}(p, q)$ симметрична относительно аргументов (p, μ) , (q, ν) , $(-(p + q), \alpha)$,

$$i(p + q)_\alpha \Gamma_{\mu\nu\alpha}(p, q) = -\frac{g^3}{6\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta \neq 0. \quad (9.9)$$

Поскольку диаграмма на рис. 18 имеет индекс, равный единице, функция $\Gamma_{\mu\nu\alpha}(p, q)$ определена с точностью до полинома первой степени по p и q . Можно было бы попытаться воспользоваться этим произволом, чтобы обратить правую часть равенства (9.9) в нуль. Легко видеть, однако, что это невозможно. Наиболее общее выражение для перенормированной трехточечной вершинной функции имеет вид

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu\alpha}(p, q) = \Gamma_{\mu\nu\alpha}(p, q) + c_1 \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_\beta + c_2 \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} q_\beta, \quad (9.10)$$

где $\Gamma_{\mu\nu\alpha}(p, q)$ — симметричная вершинная функция, удовлетворяющая соотношению (9.9). Потребовав, чтобы функция $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu\alpha}$ также была симметрична относительно аргументов (μ, p) , (ν, q) , $(\alpha, -(p + q))$, получаем

$$c_1 = c_2 = 0. \quad (9.11)$$

Таким образом, никаким выбором локальных контрчленов невозможно добиться выполнения тождества (9.8) для перенормированной вершинной функции. Вследствие этого вероятность перехода из поперечно поляризованных состояний в продольные отлична от нуля. Модель, описываемая лагранжианом (9.1), не самосогласована. Указанная трудность присуща всем теориям, инвариантным относительно абелевых калибро-

вочных преобразований, в которых участвует матрица γ_5 . Существует, однако, класс моделей, для которых эту трудность можно обойти. Пусть, например, в модели (9.1) помимо поля ψ участвует еще поле ψ' , взаимодействующее с векторным полем так же, как и ψ , но отличающееся от последнего знаком заряда,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)^2 + i\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial - igA\gamma_5)\psi + \\ + i\bar{\psi}'\gamma_\mu(\partial + igA\gamma_5)\psi'. \quad (9.12)$$

Тогда наряду с диаграммой на рис. 18 имеется аналогичная диаграмма, в которой внутренние линии отвечают полям ψ' . Из формулы (9.9) видно, что дивергенция аномальной вершинной функции пропорциональна g^3 . Поэтому диаграмма, отвечающая полю ψ' , даст в тождество (9.9) такой же вклад, но с противоположным знаком. В результате полная вершинная функция $\Gamma_{\mu\nu\alpha}$ будет удовлетворять нормальным тождествам (9.8). Непосредственным вычислением нетрудно проверить, что все остальные однопетлевые диаграммы удовлетворяют тождествам (9.8). Что касается диаграмм, содержащих более одной петли, то для них отсутствие аномалий можно доказать в общем виде. Действительно, как было показано в § 3, регуляризация с помощью высших ковариантных производных делает сходящимися все многопетлевые диаграммы в произвольной калибровочно-инвариантной теории. Поэтому, если в однопетлевых диаграммах аномалии отсутствуют, то многопетлевые диаграммы заведомо удовлетворяют нормальным тождествам Уорда. Отсутствие аномалий в модели (9.12) можно объяснить также следующим образом. В лагранжиане (9.12) можно перейти к новым каноническим переменным

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \{(1 - \gamma_5)\psi + (1 + \gamma_5)\psi'\}; \\ \psi_2 = \frac{1}{2} \{(1 + \gamma_5)\psi + (1 - \gamma_5)\psi'\}. \quad (9.13)$$

Лагранжиан взаимодействия, выраженный через поля ψ_1, ψ_2 , не содержит матриц γ_5 ,

$$\mathcal{L}_1 = (g\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_1 - g\bar{\psi}_2\gamma_\mu\psi_2)A_\mu, \quad (9.14)$$

и представляет собой аналог лагранжиана электромагнитного взаимодействия двух безмассовых спиноров. Такая теория инвариантна относительно чисто векторных калибровочных преобразований

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &\rightarrow e^{ig\alpha(x)}\psi_1(x), & \bar{\psi}_1(x) &\rightarrow e^{-ig\alpha(x)}\bar{\psi}_1(x), \\ \psi_2(x) &\rightarrow e^{-ig\alpha(x)}\psi_2(x), & \bar{\psi}_2(x) &\rightarrow e^{ig\alpha(x)}\bar{\psi}_2(x), \\ A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x)\end{aligned}\quad (9.15)$$

и, следовательно, перенормированные функции Грина удовлетворяют нормальным тождествам Уорда. Подобный механизм компенсации аномалий можно использовать и в более реалистических моделях, в частности, в моделях со спонтанно нарушенной симметрией. Если поля ψ , ψ' , A_μ взаимодействуют еще со скалярными полями, то при соответствующем выборе потенциала, за счет механизма Хиггса все физические частицы могут приобрести ненулевые массы. В то же время вид взаимодействия спинорных полей с векторными, ответственный за появление аномалий, не меняется. Поэтому все рассуждения относительно компенсации аномалий остаются в силе.

Аномальные тождества Уорда могут возникать и в неабелевых калибровочных теориях. Пусть, например, спинорные поля ψ калибровочно-инвариантным образом взаимодействуют с полем Янга — Миллса

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu - g\Gamma^a A_\mu^a)\psi + \dots, \quad (9.16)$$

и ... обозначает лагранжиан поля Янга — Миллса, а также, возможно, калибровочно-инвариантное взаимодействие полей A_μ , ψ со скалярными полями. Последнее может отвечать как симметричной теории, так и теории со спонтанно нарушенной симметрией.

Матрицы Γ^a реализуют представление алгебры Ли

$$[\Gamma^a, \Gamma^b] = f^{abc}\Gamma^c \quad (9.17)$$

и могут включать также матрицу γ_5 . Дивергенция трехточечной вершинной функции Грина вычисляется точно так же, как в абелевом случае. Единственное отличие состоит в появлении дополнительного множителя, про-

порционного следу произведения стоящих в вершинах Γ матриц:

$$i(p+q)_\alpha \Gamma_{\mu\nu\alpha}^{abc}(p, q) = \\ = \text{const tr} \{ \gamma_5 [\Gamma_a, \Gamma_b]_+ \Gamma_c \} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta. \quad (9.18)$$

Если множитель

$$A_{abc} = \text{tr} \{ \gamma_5 [\Gamma_a, \Gamma_b]_+ \Gamma_c \} \quad (9.19)$$

отличен от нуля, то функция $\Gamma_{\mu\nu\alpha}^{abc}$ не удовлетворяет обобщенным тождествам Уорда, что приводит к потере калибровочной инвариантности перенормированной теории.

Проанализируем, в каких случаях A_{abc} равно нулю. С этой целью введем вместо матриц Γ_a киральные матрицы $T_\pm$

$$\Gamma_a = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) T_a^+ + \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) T_a^-, \quad (9.20)$$

где $T_\pm$ уже не содержат матрицу γ_5 .

Множитель A_{abc} можно теперь представить в виде

$$A_{abc} = 2 (A_{abc}^+ - A_{abc}^-), \quad (9.21)$$

где

$$A_{abc}^\pm = \text{tr} \{ [T_a^\pm, T_b^\pm]_+ T_c^\pm \}. \quad (9.22)$$

A_{abc} очевидно обращается в нуль, если $A^+ = A^-$. Это заведомо выполнено, если представления $T_a^\pm$ унитарно эквивалентны:

$$T_a^- = U T_a^+ U^\dagger, \quad (9.23)$$

где U — унитарная матрица. В этом случае, выбирая другой базис спинорных полей, взаимодействие можно переписать в чисто векторном виде:

$$\bar{\psi} \gamma_\mu \Gamma_a \psi = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma_\mu \{ (1 + \gamma_5) T_a^+ + (1 - \gamma_5) T_a^- \} \psi = \\ = \bar{\psi}' \gamma_\mu T_a^+ \psi', \quad (9.24)$$

где

$$\psi' = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi + \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) U \psi. \quad (9.25)$$

При таком переопределении полей ψ γ_5 -матрицы появляются в массовых членах. Отсутствие аномалий в таких моделях совершенно естественно. В базисе ψ' калибровочные преобразования уже не содержат матрицы γ_5 и поэтому к ним применима описанная ранее процедура инвариантной регуляризации, позволяющая строго доказать обобщенные тождества Уорда. Конкретный вид калибровочной группы при этом не существен.

Подобные модели называются «векторно подобными», поскольку при больших энергиях, существенно превышающих все характерные массы, они ведут себя так же, как модели с чисто векторным взаимодействием.

Унитарная эквивалентность T_+ и T_- не является необходимой для отсутствия аномалий. Для этого достаточно выполнения равенства (9.21), которое может выполняться и по другим причинам.

Аномалии отсутствуют и в том случае, если $A_{abc}^+ = A_{abc}^- = 0$, что имеет место для некоторых калибровочных групп. Достаточным условием для этого является вещественность представлений, реализуемых матрицами $T_a^\pm$. (Представление называется вещественным, если оно унитарно эквивалентно своему комплексно сопряженному.) В этом случае

$$\begin{aligned} \text{tr} \{ [T_a^\pm, T_b^\pm]_+ T_c^\pm \} &= \text{tr} \{ [(T_a^\pm)^*, (T_b^\pm)^*]_+ (T_c^\pm)^* \} = \\ &= -\text{tr} \{ [T_a^\pm, T_b^\pm]_+ T_c^\pm \} = 0. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Такая ситуация осуществляется для алгебр

$$\begin{aligned} SU(2); SO(N), N \geq 5, N \neq 6; S_p(2N), N \geq 3; \\ G(2); E(4); E(7); E(8), \end{aligned} \quad (9.27)$$

все представления которых вещественны. Для алгебры $SU(3)$ аномалии отсутствуют лишь для представлений 8 и $3 + \bar{3}$.

В неабелевых теориях аномальными могут быть также однопетлевые диаграммы с четырьмя внешними векторными линиями. Если же в данной модели все однопетлевые диаграммы удовлетворяют нормальным тождествам Уорда, то многопетлевые диаграммы заведомо свободны от аномалий. Это, как мы уже отмечали,

непосредственно следует из того, что регуляризация с помощью высших ковариантных производных регуляризует многопетлевые диаграммы в любой калибровочной теории, в том числе содержащей γ_5 преобразования. Поэтому многопетлевые диаграммы автоматически удовлетворяют нормальным тождествам Уорда.

Приведенная классификация «нормальных» и «аномальных» теорий в равной мере относится и к теориям со спонтанно нарушенной симметрией. В аномальном случае унитарная и перенормируемая калибровки соответствуют физически не эквивалентным теориям. В унитарной калибровке теория перенормируема и потому в рамках теории возмущений не имеет смысла. Наоборот, в перенормируемой калибровке теория возмущений строится без труда, однако S -матрица не унитарна в пространстве физических состояний. Тем самым требование отсутствия аномалий накладывает жесткие ограничения на возможные калибровочно-инвариантные модели.



ЗАКЛЮЧЕНИЕ. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

В этой главе мы обсудим возможные приложения калибровочных теорий к описанию взаимодействий элементарных частиц. Экспериментальная ситуация как в слабых, так и в сильных взаимодействиях меняется очень быстро, и в настоящее время трудно отдать предпочтение какой-либо конкретной модели. Поэтому мы ограничимся описанием наиболее характерных особенностей калибровочно-инвариантных моделей элементарных частиц, не пытаясь отразить новейшие веяния в этой области. Рассматриваемые примеры носят педагогический, иллюстративный характер.

§ 1. Объединенные модели слабых и электромагнитных взаимодействий

До недавнего времени электродинамика была единственным успешным примером применения в физике элементарных частиц квантовой теории поля вообще, и калибровочно-инвариантных теорий в частности. В то же время уже довольно давно было замечено, что слабые взаимодействия имеют много общего с электромагнитными. Из эксперимента известно, что в слабых взаимодействиях участвуют векторные токи. Это наводит на мысль, что, так же как и в электродинамике, взаимодействие осуществляется за счет обмена векторными частицами, получившими название промежуточных W -мезонов. Так же как и электромагнитный ток, слабый векторный ток сохраняется. Наконец, слабое взаимодействие является универсальным — взаимодействие характеризуется одной и той же константой связи (если отвлечься от эффектов, обусловленных возможностью смешивания различных фундаментальных частиц).

Все эти свойства получают естественное объяснение, если предположить, что слабое и электромагнитное взаимодействия описываются калибровочно-инвариантной теорией, в которой роль переносчиков взаимодействия играют поля Янга — Миллса. При этом, однако, в отличие от дальнодействующего электромагнитного взаимодействия, слабое взаимодействие имеет конечный радиус действия и, следовательно, соответствующие векторные поля должны быть массивными. Второе отличие состоит в том, что слабое взаимодействие не сохраняет четность. Эти различия, которые долгое время препятствовали созданию реалистической объединенной модели слабых и электромагнитных взаимодействий, можно с успехом объяснить с помощью механизма Хиггса. Спонтанное нарушение симметрии позволяет выделить «электромагнитное» направление во внутреннем зарядовом пространстве. Соответствующий векторный мезон остается безмассовым и взаимодействует с сохраняющим четность током. Остальные мезоны приобретают ненулевую массу, и их взаимодействие не сохраняет четность.

Рассмотрим простейшую реализацию этих идей. Выбор калибровочной группы в значительной мере произволен. Размерность группы должна быть не меньше трех, поскольку она должна включать как минимум генераторы, соответствующие фотону (1) и промежуточным векторным мезонам (2). Если ограничиться лишь «легкими» лептонами — электроном, мю-мезоном и соответствующими нейтрино, то минимальное число генераторов равно четырем. Действительно, заряженный слабый ток имеет следующую структуру

$$j_e^+ = \bar{\nu}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) e = \bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \tau^+ \psi_e, \quad (1.1)$$

где

$$\psi_e = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

(мюонный ток имеет аналогичную структуру).

Следовательно, матрицы $(1 + \gamma_5) \tau^+$ и $(1 + \gamma_5) \tau^-$ входят в алгебру Ли калибровочной группы. Минимальная алгебра Ли, включающая эти матрицы, состоит из генераторов

$$(1 + \gamma_5) \tau^+, \quad (1 + \gamma_5) \tau^-, \quad (1 + \gamma_5) \tau_3 \quad (1.3)$$

и соответствует группе $SU(2)$. Эта алгебра не содержит генератора, с помощью которого можно было бы построить сохраняющий четность электромагнитный ток. Простейшая алгебра, порождающая как электромагнитный, так и заряженный токи, отвечает группе $U(2)$ и содержит четыре генератора, один из которых соответствует нейтральному слабому току.

Именно эта группа лежит в основе модели Вейнберга — Салама, которую мы обсудим ниже.

Если не ограничиваться известными «легкими» лептонами, то, вводя дополнительные слабо взаимодействующие частицы, можно построить объединенную модель с правильными заряженными и электромагнитным токами, не выходя за рамки группы $SU(2)$. Такая модель была предложена Джорджи и Глешоу. Однако эта модель не согласуется с современными экспериментальными данными, и мы не будем ее обсуждать.

Указанные возможности являются минимальными. В литературе обсуждаются многочисленные модели, основанные на более сложных калибровочных группах.

Исторически, когда конструировались первые объединенные модели, экспериментально не были известны ни нейтральные токи, ни тяжелые лептоны. В настоящее время оба этих предсказания подтверждены экспериментально.

Ниже мы подробно опишем модель, основанную на группе $SU(2) \times U(1)$ — модель Вейнберга — Салама. В модели Вейнберга — Салама электрон и электронное нейтрино объединяются в SU_2 дублет L и синглет R :

$$L = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \quad R = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) e. \quad (1.4)$$

Такой выбор мультиплетов диктуется тем, что право- и левополяризованные лептоны входят в слабое взаимодействие не симметрично — правополяризованное электронное нейтрино экспериментально не наблюдается. В аналогичные мультиплеты объединяются мюон и мюонное нейтрино. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением электронного сектора. Потребовав, чтобы слабые заряженные токи имели структуру $V - A$ и чтобы фотон взаимодействовал только с векторным током за-

ряженных частиц, мы приходим к следующему закону преобразования:

$$\begin{aligned} L(x) &\rightarrow L(x) - ig \frac{\tau^a}{2} \xi^a(x) L(x) - \frac{ig_1}{2} \eta(x) L(x) + \dots, \\ R(x) &\rightarrow R(x) - ig_1 \eta(x) R(x) + \dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

Поскольку группа $SU(2) \times U(1)$ не простая, калибровочные преобразования включают два произвольных параметра g и g_1 . Подгруппам $SU(2)$ и $U(1)$ соответствуют калибровочные поля: изовекторное поле A_μ^a , и синглет B_μ .

Калибровочно-инвариантный лагранжиан, описывающий взаимодействие мультиплетов R и L с полями Янга — Миллса, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{8} \text{tr} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu} G_{\mu\nu} + \\ & + \bar{L} i \gamma_\mu \left[\partial_\mu + ig \frac{\tau^a}{2} A_\mu^a + \frac{ig_1}{2} \mathcal{B}_\mu \right] L + \bar{R} i \gamma_\mu \left[\partial_\mu + ig_1 \mathcal{B}_\mu \right] R, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ — тензор напряженности поля Янга — Миллса, а $G_{\mu\nu}$ — аналогичный тензор для абелева поля

$$G_{\mu\nu} = \partial_\nu B_\mu - \partial_\mu B_\nu. \quad (1.7)$$

Заметим, что массовый член для лептонов

$$m(\bar{L}R + \bar{R}L) \quad (1.8)$$

запрещен требованием инвариантности относительно преобразований (1.5).

Все поля, входящие в лагранжиан (1.6) имеют нулевую массу. Однако если поля $\mathcal{A}_\mu$, B_μ и R , L взаимодействуют еще со скалярными полями, то они могут приобрести ненулевые массы за счет эффекта Хиггса. Поскольку все векторные мезоны, кроме фотона, должны стать массивными, мы воспользуемся конкретной моделью спонтанного нарушения симметрии (I.3.25). Введем комплексный дублет

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

преобразующийся при калибровочных преобразованиях следующим образом:

$$\varphi \rightarrow \varphi - ig\zeta^a(x) \frac{\tau^a}{2} \varphi - \frac{ig_1}{2} \eta(x) \varphi(x). \quad (1.10)$$

Калибровочно-инвариантный лагранжиан, описывающий взаимодействие φ с полями A_μ , B_μ , R , L , имеет вид

$$\mathcal{L} = \left| \partial_\mu \varphi + ig \frac{\tau^a}{2} A_\mu^a \varphi + \frac{ig_1}{2} B_\mu \varphi \right|^2 - \\ - G \{ (\bar{L}\varphi) R + \bar{R} (\varphi^+ L) \} + \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \lambda^2 (\varphi^2)^2. \quad (1.11)$$

Как мы уже знаем, взаимодействие вида (1.11) порождает спонтанное нарушение симметрии: вакуумное среднее поля φ отлично от нуля, и для того чтобы строить теорию возмущений вблизи симметричного основного состояния, нужно перейти к сдвинутым полям:

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 + r \end{pmatrix}; \quad (\text{Im } r = 0). \quad (1.12)$$

В результате этого сдвига возникают массовые члены для векторных полей

$$\frac{r^2}{4} [g^2 (A_\mu^1)^2 + g^2 (A_\mu^2)^2 + (g_1 B_\mu - g A_\mu^3)^2]. \quad (1.13)$$

Диагонализация квадратичной формы (1.13) приводит к следующему спектру масс:

Заряженные мезоны $W_\pm$

$$W_{\mu \mp} = \frac{A_\mu^1 \pm A_\mu^2}{\sqrt{2}} \quad (1.14)$$

приобретают массы

$$m_W = \frac{1}{\sqrt{2}} gr. \quad (1.15)$$

Нейтральные мезоны

$$Z_\mu = (g^2 + g_1^2)^{-1/2} (-g A_\mu^3 + g_1 B_\mu) \quad (1.16)$$

и

$$A_\mu = (g^2 + g_1^2)^{-1/2} (g_1 A_\mu^3 + g B_\mu) \quad (1.17)$$

приобретают массы $\frac{r}{\sqrt{2}} (g^2 + g_1^2)^{1/2}$ и 0 соответственно.

В результате сдвига (1.12) ненулевую массу приобретают также лептоны. Массовый член имеет вид

$$-G \left\{ \bar{L} \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} R + \bar{R} (0, r) L \right\} = -Gr\bar{e}e. \quad (1.18)$$

Нейтрино остается безмассовым.

Наконец, пользуясь разложением

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (iB_1 + B_2); \quad \varphi_2 = r + \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma - iB_3), \quad (1.19)$$

находим, что поле σ приобретает массу $2\lambda r$.

Голдстоуновские поля B_i имеют нулевую массу и, как обычно, могут быть устранены калибровочным преобразованием.

Взаимодействие лептонов с векторными полями имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I = & \frac{-g}{2\sqrt{2}} \bar{\nu}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) e W_\mu^+ + \text{э. с.} + \frac{gg_1}{(g^2 + g_1^2)^{1/2}} \bar{e} \gamma_\mu e A_\mu + \\ & + \frac{(g^2 + g_1^2)^{1/2}}{4} \left\{ \bar{\nu}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu_e - 2\bar{e} \gamma_\mu \left[\gamma_5 + \frac{g^2 - 3g_1^2}{g^2 + g_1^2} \right] e \right\} Z_\mu. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Из этой формулы видно, что электромагнитная константа e и константа слабого взаимодействия Ферми G_F выражаются через параметры g и g_1 следующим образом:

$$e = \frac{gg_1}{\sqrt{g^2 + g_1^2}}, \quad (1.21)$$

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8m_W^2}. \quad (1.22)$$

Из (1.21) следует, что

$$e \leq g, \quad (1.23)$$

откуда

$$m_W = \left(\frac{g^2 \sqrt{2}}{8G_F} \right)^{1/2} \geq \left(\frac{e^2 \sqrt{2}}{8G_F} \right)^{1/2} = 37.5 \text{ Gev}, \quad (1.24)$$

т. е. масса заряженного промежуточного мезона ограничена снизу и велика.

Аналогичная оценка для массы нейтрального мезона дает

$$m_z \geq 75 \text{ Gev}. \quad (1.25)$$

Помимо выписанных выше членов, лагранжиан взаимодействия описывает также самодействие скалярных мезонов σ и их взаимодействие с лептонами. Поскольку масса σ мезона является свободным параметром, она может быть выбрана настолько большой, что при достижимых в настоящее время энергиях процессы с участием σ мезонов сильно подавлены. Однако эту массу нельзя сделать сколь угодно большой: в пределе $m_\sigma \rightarrow \infty$, амплитуды, которым соответствуют диаграммы, имеющие внутренние σ -линии, обращаются в бесконечность.

Мюонная часть лагранжиана взаимодействия имеет вид, абсолютно идентичный (1.20).

Наиболее интересным экспериментальным предсказанием модели Вейнберга — Салама является существование нейтральных токов. Это предсказание блестяще подтвердилось.

Что касается взаимодействия заряженных слабых токов, то здесь предсказания модели Вейнберга — Салама в низшем порядке совпадают с предсказаниями феноменологической четырехфермионной модели. При этом, в отличие от последней, модель Вейнберга — Салама позволяет вычислять также радиационные поправки высшего порядка.

Обсудим подробнее вопрос о перенормируемости модели Вейнберга — Салама. Поскольку лагранжиан (1.6), (1.11) калибровочно-инвариантен, к нему применима описанная в предыдущей главе процедура перенормировки. Однако калибровочная группа содержит абелеву подгруппу $U(1)$ и в соответствии с классификацией § 8 главы IV является аномальной. Поэтому, несмотря на формальную калибровочную инвариантность, модель Вейнберга — Салама, описываемая лагранжианом (1.6), (1.11), неперенормируема. Исправить положение можно с помощью механизма, описанного в предыдущей главе. Как мы видели, аномалии отсутствуют в случае любой калибровочной группы, если правополяризованные и левополяризованные фермионы дают в аномаль-

ную треугольную диаграмму вклады, равные по величине и противоположные по знаку. Поэтому если в модели Вейнберга — Салама ввести помимо электронных мультиплетов (1.1) мультиплеты с противоположной спиральностью

$$\tilde{R} = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \begin{pmatrix} N \\ E \end{pmatrix}, \quad \tilde{L} = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) E, \quad (1.26)$$

взаимодействующие с векторными полями так же, как L и R , то в такой модифицированной модели аномалии уже отсутствуют. Заметим, однако, что в качестве $\tilde{L}$ и $\tilde{R}$ нельзя использовать мюон и мюонное нейтрино, поскольку «компенсирующие» лептоны должны участвовать в слабом взаимодействии с противоположной спиральностью. Таким образом, перенормируемое расширение модели Вейнберга — Салама требует введения тяжелых лептонов.

Вторая возможность, которую мы обсудим позже, основана на использовании взаимной компенсации аномалий лептонного и адронного токов.

Перейдем теперь к обсуждению слабых и электромагнитных взаимодействий адронов. Подобно тому как модель Вейнберга — Салама для лептонов предсказывает существование нейтральных лептонных токов, аналогичная модель для адронного сектора предсказывает существование слабых нейтральных адронных токов. При этом, если группой симметрии адронов является группа $SU(3)$, то нейтральный ток содержит члены, меняющие странность. Чтобы убедиться в этом, напомним, что в $SU(3)$ симметричной теории слабый заряженный адронный ток описывается формулой Каббибо

$$j_\mu^+ = \bar{p} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) (n \cos \theta + \lambda \sin \theta). \quad (1.27)$$

Здесь p и n — протонный и нейтронный кварки с зарядами $2/3$ и $-1/3$, λ — странный кварк с зарядом $-1/3$, θ — угол Каббибо, характеризующий относительные вероятности процессов с изменением и без изменения странности.

Так же как в модели Вейнберга — Салама для лептонов, генераторы, соответствующие заряженным токам, порождают группу $SU(2)$. Поэтому в калибровочноинвариантной теории наряду с заряженными токами

(1.27) присутствует нейтральный ток вида

$$j_\mu^3 = \bar{p}\gamma_\mu(1 + \gamma_5)p + (\bar{n}\cos\theta + \bar{\lambda}\sin\theta)\gamma_\mu(1 + \gamma_5)(n\cos\theta + \lambda\sin\theta). \quad (1.28)$$

Ток j_μ^3 взаимодействует с третьей компонентой поля Янга — Миллса A_μ^3 и, следовательно, представляет собой линейную комбинацию электромагнитного и слабого нейтрального тока. В результате в такой модели разрешены процессы, идущие через нейтральные токи с изменением странности, такие как

$$K_L^0 \rightarrow \mu^+\mu^-, \quad K^+ \rightarrow \pi^+\nu\bar{\nu}, \quad (1.29)$$

причем вероятности этих процессов должны быть сравнимы с вероятностями процессов, идущих через заряженные токи. Из эксперимента известно, что процессы типа (1.29) запрещены с очень высокой степенью точности. Отношение вероятности распада $K_L^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$ к вероятности распада $K^+ \rightarrow \mu^+\nu_\mu$, идущего через заряженные слабые токи $\leq 10^{-9}$. Запретить подобные процессы в калибровочно-инвариантной теории можно, отказавшись от предположения об $SU(3)$ -структуре адронов. Простейшая возможность состоит в замене группы $SU(3)$ группой $SU(4)$. В кварковой модели это эквивалентно введению четвертого кварка p' , обладающего новым квантовым числом — «очарованием».

Четырехкварковая калибровочная модель слабых и электромагнитных взаимодействий строится так же, как модель Вейнберга — Салама для лептонов. Левополяризованные кварки объединяются в два $SU(2)$ -дублета

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \begin{pmatrix} p \\ n\cos\theta + \lambda\sin\theta \end{pmatrix}; \\ L_2 &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \begin{pmatrix} p' \\ -n\sin\theta + \lambda\cos\theta \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

а правополяризованные — в синглеты

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)p, \quad R_2 = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)p', \\ R_3 &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)(n\cos\theta + \lambda\sin\theta); \\ R_4 &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)(-n\sin\theta + \lambda\cos\theta). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Заряженный адронный ток имеет вид

$$j_\mu^+ = \\ = \bar{p}_L \gamma_\mu (n \cos \theta + \lambda \sin \theta) + \bar{p}'_L \gamma_\mu (-n \sin \theta + \lambda \cos \theta). \quad (1.32)$$

Коммутируя j_μ^+ и j_μ^- , получаем для j_μ^3 выражение

$$j_\mu^3(x) = \left[\int j_0^+(y) d^3y, j_\mu^-(x) \right] = \\ = \bar{p} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) p + \bar{n} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) n + \bar{\lambda} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \lambda. \quad (1.33)$$

В этом токе меняющие странность члены отсутствуют и, следовательно, процессы типа (1.29) в низшем порядке по слабому взаимодействию запрещены.

Мы не будем выписывать здесь полного калибровочно-инвариантного лагранжиана слабого и электромагнитного взаимодействия адронов. Он выглядит совершенно аналогично лагранжиану (1.3). Его наиболее замечательной особенностью является предсказание «очарованных» адронных состояний. Недавние эксперименты подтверждают и это предсказание калибровочных теорий.

Чтобы закончить описание моделей слабых взаимодействий адронов, напомним, что согласно общепринятой сейчас точке зрения существует три разновидности кварков, отличающихся друг от друга «цветом», т. е. каждый из кварков p, p', n, λ может иметь три различных «цвета». Слабые взаимодействия не чувствительны к цвету и соответствующий лагранжиан представляет собой сумму трех идентичных лагранжианов. Гипотеза о существовании цвета была выдвинута для того, чтобы объяснить наблюдаемый спектр адронов в рамках обычных предположений о связи спина со статистикой. Удивительным образом оказалось, что введение цвета одновременно делает самосогласованной описанную выше объединенную модель слабых взаимодействий. В модели, в которой участвуют четыре лептона μ, e, ν_μ, ν_e и четыре трехцветных кварка p, p', n, λ с зарядами $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$, отсутствуют аномалии и, следовательно, соответствующая теория перенормируема. В данном случае суммарный заряд лептонов (-2) равен по

величине и противоположен по знаку суммарному заряду кварков $\left(\frac{2}{3} \times 3\right) = 2$, и в силу этого аномалии лептонного и адронного токов компенсируются.

Описанная модель до недавнего времени успешно объясняла все известные экспериментальные факты. С точки зрения теории она выделена тем, что это единственная (в предположении о том, что кварки имеют дробные заряды) перенормируемая модель слабых взаимодействий, включающая только легкие лептоны μ , e , ν_μ , ν_e . Однако сейчас известно, что спектр лептонов не ограничивается мюоном и электроном, и существуют также «тяжелые» лептоны. Поэтому модель с четырьмя лептонами и четырьмя трехцветными кварками недостаточна. Существует много возможностей построения перенормируемых калибровочных моделей, включающих большее число лептонов и кварков. Ввиду отсутствия в настоящее время надежной экспериментальной информации, позволяющей предпочесть ту или иную конкретную модель, мы не будем их здесь обсуждать.

§ 2. Асимптотическая свобода. Калибровочные теории сильных взаимодействий

Динамика сильных взаимодействий кажется на первый взгляд слишком сложной, чтобы пытаться описать ее в рамках какой-либо разумной модели квантовой теории поля. До недавнего времени для описания сильных взаимодействий использовались либо методы дисперсионных соотношений, основанные лишь на самых общих физических требованиях причинности и унитарности, либо феноменологические модели. Попытки построить релятивистскую лагранжеву модель, которая давала бы детальное описание динамики сильных взаимодействий, не привели даже к качественным результатам.

С другой стороны эксперименты по глубоко неупругому рассеянию лептонов на протонах свидетельствуют в пользу того, что в основе сильных взаимодействий лежит простой динамический механизм. При больших переданных импульсах, что эквивалентно малым пространственным расстояниям, адроны ведут себя так, как если

бы они состояли из невзаимодействующих точечных объектов. Таким образом возникает следующая качественная картина: адроны являются сложными объектами, причем взаимодействие их составляющих элементов стремится к нулю на малых расстояниях. В то же время на больших расстояниях эффективное взаимодействие становится сильным, благодаря чему адрон является сильно связанной системой.

Можно ли описать такое взаимодействие в рамках какой-либо модели квантовой теории поля? Ответ на этот вопрос оказывается однозначным. Описанное выше поведение взаимодействия можно получить только в неабелевой калибровочной теории. Все непротиворечивые модели теории поля, в которых не участвуют поля Янга — Миллса, приводят к росту эффективного взаимодействия на малых расстояниях. Эта уникальная особенность полей Янга — Миллса связана с явлением асимптотической свободы, к описанию которого мы теперь переходим.

Мы будем обсуждать сейчас асимптотическое поведение функций Грина в глубоко евклидовой области, когда квадраты всех импульсных аргументов p_i отрицательны и велики по абсолютной величине.

Непосредственного физического смысла эта асимптотика, разумеется, не имеет, так как для вычисления S -матрицы нужны значения функций Грина при $p_i^2 = m_i^2 \geq 0$. Можно показать, однако, что вероятность процессов глубоко неупругого рассеяния непосредственно связана с поведением функций Грина в глубоко евклидовой области.

Точнее говоря, мы будем исследовать асимптотики сильно связанных собственных вершинных функций $\Gamma_n(\kappa p_1 \dots \kappa p_n, m, g)$, где $p_i^2 = -a_i^2 < 0$ при $\kappa \rightarrow \infty$. Для этого нам понадобится аппарат ренормгруппы, основные идеи которого мы кратко напомним.

Как мы уже знаем, вычитание первых членов разложения в ряд Тейлора расходящихся собственных вершинных функций эквивалентно введению в лагранжиан локальных контрчленов, что в свою очередь эквивалентно перенормировке параметров, входящих в лагранжиан. Переход от одной точки вычитания к другой

эквивалентен конечной перенормировке. Например, введение контрчленов

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \operatorname{tr} \{ (z_2 - 1) (\partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu)^2 + \\ + 2g (z_1 - 1) (\partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu) [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] + \\ + (z_1^2 z_2^{-1} - 1) [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]^2 \} + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

(где ... обозначают соответствующие контрчлены для фиктивных частиц и полей материи) эквивалентно следующей перенормировке функций Грина и зарядов

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^{\operatorname{tr}}(k, g) &\rightarrow z_2^{-1} G_{\mu\nu}^{\operatorname{tr}}(k, g'), \\ \Gamma_{A^3}(p, q, g) &\rightarrow z_1 \Gamma_{A^3}(p, q, g'), \\ \Gamma_{A^4}(k, p, q, g) &\rightarrow z_1^2 z_2^{-1} \Gamma_{A^4}(k, p, q, g'), \\ g &\rightarrow g' = z_1 z_2^{-3/2} g. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Поэтому если одновременно ввести контрчлены (2.1) и умножить константу связи на $z_1^{-1} z_2^{3/2}$, то в результате перенормированная константа связи не изменится.

Будем обозначать скалярные функции, получающиеся после выделения из $G_{\mu\nu}^{\operatorname{tr}}$, Γ_{A^3} и Γ_{A^4} тензорных структур через D , $g\Gamma_3$, $g^2\Gamma_4$. Эти функции безразмерны и, следовательно, их можно представить в виде

$$\begin{aligned} D = D\left(\frac{k^2}{\lambda}, \frac{m^2}{\lambda}, g\right); \quad \Gamma_3 = \Gamma_3\left(\frac{k_1^2}{\lambda} \dots \frac{k_3^2}{\lambda}, \frac{m^2}{\lambda}, g\right); \\ \Gamma_4 = \Gamma_4\left(\frac{k_4^2}{\lambda} \dots \frac{k_{10}^2}{\lambda}, \frac{m^2}{\lambda}, g\right), \\ k_1^2 \equiv p^2, \quad k_2^2 \equiv q^2, \quad k_3^2 \equiv (p + q)^2 \text{ и т. д.,} \end{aligned} \quad (2.3)$$

где λ точка вычитания. (Инвариантные переменные выбраны так, чтобы функции Γ_i были вещественны при $k_i^2 = \lambda < 0$.) Тогда условие независимости теории от выбора точки вычитания при одновременном компенсиро-

рующем преобразовании заряда (ренорминвариантности) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 D\left(\frac{k^2}{\lambda_2}, \frac{m^2}{\lambda_2}, g_2\right) &= z_2 D\left(\frac{k^2}{\lambda_1}, \frac{m^2}{\lambda_1}, g_1\right), \\
 \Gamma_3\left(\frac{k_1^2}{\lambda_2} \dots \frac{k_3^2}{\lambda_2}, \frac{m^2}{\lambda_2}, g_2\right) &= \\
 &= z_1^{-1} \Gamma_3\left(\frac{k_1^2}{\lambda_1} \dots \frac{k_3^2}{\lambda_1}, \frac{m^2}{\lambda_1}, g_1\right), \quad (2.4) \\
 \Gamma_4\left(\frac{k_4^2}{\lambda_2} \dots \frac{k_{10}^2}{\lambda_2}, \frac{m^2}{\lambda_2}, g_2\right) &= \\
 &= z_1^{-2} z_2^{-1} \Gamma_4\left(\frac{k_4^2}{\lambda_1} \dots \frac{k_{10}^2}{\lambda_1}, \frac{m^2}{\lambda_1}, g_1\right), \\
 g_2 &= z_1 z_2^{-3/2} g_1.
 \end{aligned}$$

Будем считать, что эти функции нормированы условием

$$D, \Gamma_3, \Gamma_4 = 1 \quad (2.5)$$

при $x_i = \frac{k_i^2}{\lambda} = 1$.

Из уравнений (2.4) и условия нормировки следует, что

$$\begin{aligned}
 z_2 &= D\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \frac{m^2}{\lambda_2}, g_2\right), \\
 z_1^{-1} &= \Gamma_3\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \frac{m^2}{\lambda_2}, g_2\right). \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

Поэтому вводя безразмерные переменные

$$x_i = \frac{k_i^2}{\lambda_2}, \quad y = \frac{m^2}{\lambda_2}, \quad t = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad (2.7)$$

систему (2.4) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 D(x, y, g) &= D(t, y, g) D\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \bar{g}(t, y, g)\right), \\
 \Gamma_3(x_1 \dots x_3, y, g) &= \\
 &= \Gamma_3(t \dots t, y, g) \Gamma_3\left(\frac{x_1}{t} \dots \frac{x_3}{t}, \frac{y}{t}, \bar{g}(t, y, g)\right), \quad (2.8) \\
 \Gamma_4(x_4 \dots x_{10}, y, g) &= \\
 &= \Gamma_4(t \dots t, y, g) \Gamma_4\left(\frac{x_4}{t} \dots \frac{x_{10}}{t}, \frac{y}{t}, \bar{g}(t, y, g)\right),
 \end{aligned}$$

где функция $\bar{g}(t, y, g)$

$$\bar{g}(t, y, g) = g \Gamma_3(t \dots t, y, g) [D(t, y, g)]^{3/2} \quad (2.9)$$

инвариантна относительно преобразований (2.4). Эта функция называется инвариантным зарядом.

Нас будут интересовать эти уравнения в глубоко евклидовой области $x_i = \kappa \tilde{x}_i$, $\kappa \rightarrow \infty$. Будем считать также, что

$$|\lambda_i| \gg m^2. \quad (2.10)$$

Можно показать, что в перенормируемых теориях ведущие члены в асимптотике функций Грина в указаниях области не зависят от массы и поэтому в уравнениях (2.8) можно положить $y = 0$.

Систему (2.8) удобно переписать в дифференциальной форме. Дифференцируя уравнения (2.8) по t и полагая $t = 1$, получаем

$$\begin{aligned} \left(\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right) D(\kappa \tilde{x}_i, g) &= \psi_2(g) D(\kappa \tilde{x}_i, g), \\ \left(\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right) \Gamma_3(\kappa \tilde{x}_i, g) &= \psi_3(g) \Gamma_3(\kappa \tilde{x}_i, g), \\ \left(\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right) \Gamma_4(\kappa \tilde{x}_i, g) &= \psi_4(g) \Gamma_4(\kappa \tilde{x}_i, g), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где

$$\beta(g) = \frac{\partial \bar{g}(t, g)}{\partial t} \Big|_{t=1}, \quad (2.12)$$

$$\psi_i(g) = \frac{\partial \Gamma_i(t \dots t, g)}{\partial t} \Big|_{t=1}; \quad \psi_2(g) = \frac{\partial D(t, g)}{\partial t} \Big|_{t=1}. \quad (2.13)$$

Аналогичные уравнения можно, очевидно, написать и для старших функций Грина $\Gamma_n(\kappa \tilde{x}_1, \dots, \kappa \tilde{x}_l, g)$. Наиболее простому уравнению удовлетворяет инвариантный заряд $\bar{g}$. Дифференцируя условие инвариантности

$$\bar{g}(\kappa, g) = \bar{g}\left(\frac{\kappa}{t}, \bar{g}(t, g)\right) \quad (2.14)$$

по t и полагая $t = 1$, имеем

$$\left(\kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \right) \bar{g}(\kappa, g) = 0. \quad (2.15)$$

Граничное условие имеет вид

$$\bar{g}(1, g) = g. \quad (2.16)$$

Другую полезную форму уравнения для инвариантного заряда можно получить, дифференцируя (2.14) по κ и полагая затем $\kappa = t$. Получаем таким образом

$$\kappa \frac{\partial \bar{g}}{\partial \kappa} = \beta(\bar{g}) \quad (2.17)$$

или, в интегральной форме,

$$\int_g^{\bar{g}(\kappa, g)} \frac{da}{\beta(a)} = \ln \kappa. \quad (2.18)$$

С помощью уравнения (2.15) легко выразить решение системы (2.11) через инвариантный заряд. Общее решение имеет вид

$$\Gamma_n(\kappa \tilde{x}_i, g) = \Gamma_n(\tilde{x}_i, \bar{g}) \exp \left\{ \int_1^\kappa d\kappa' \psi_n[\bar{g}(\kappa', g)] (\kappa')^{-1} \right\}. \quad (2.19)$$

Из этой формулы следует важный вывод: в асимптотической области эффективным параметром, характеризующим силу взаимодействия, является инвариантный заряд $\bar{g}$. Поэтому чтобы получить информацию об асимптотическом поведении функции Грина, нужно знать, как ведет себя $\bar{g}$. Из уравнений (2.15), (2.17) следует, что поведение инвариантного заряда определяется свойствами функции $\beta(\bar{g})$. Если $\beta(\bar{g})$ положительна, то с ростом κ инвариантный заряд тоже растет. Если при некотором $\bar{g}$ функции $\beta(\bar{g})$ обращается в нуль, и интеграл в левой части (2.18) расходится, то, следовательно, правая часть должна обращаться в бесконечность. Другими словами, при $\kappa \rightarrow \infty$, $\bar{g}(\kappa, g) \rightarrow \bar{g}_0$, где $\bar{g}_0$ — нуль функции β . Если функция β не имеет нулей при $\bar{g} > g$, то при $\kappa \rightarrow \infty$, $\bar{g} \rightarrow \infty$. При отрицательных $\beta(\bar{g})$ ситуация обратная. С ростом κ функция $\bar{g}(\kappa, g)$ убывает. При этом, если функция $\beta(\bar{g})$ обращается в нуль при $\bar{g} = \bar{g}_0 < g$, то при $\kappa \rightarrow \infty$, $\bar{g} \rightarrow \bar{g}_0$.

Таким образом, нули функции β могут быть стабильными и нестабильными. Если константа g лежит в окрестности «стабильного» нуля, $\bar{g}_0$, то с увеличением κ инвариантный заряд $\bar{g}(\kappa, g)$ стремится к $\bar{g}_0$. В нестабильной ситуации с ростом κ инвариантный заряд уходит

все дальше и дальше от $\bar{g}_0$. Он стремится к следующему стабильному нулю либо к бесконечности. Оба этих случая изображены графически на рис. 19. Из этого рисунка очевидно, что стабильные и нестабильные нули чередуются между собой.

На практике единственный надежный способ вычисления β -функции дает теория возмущений. Поэтому

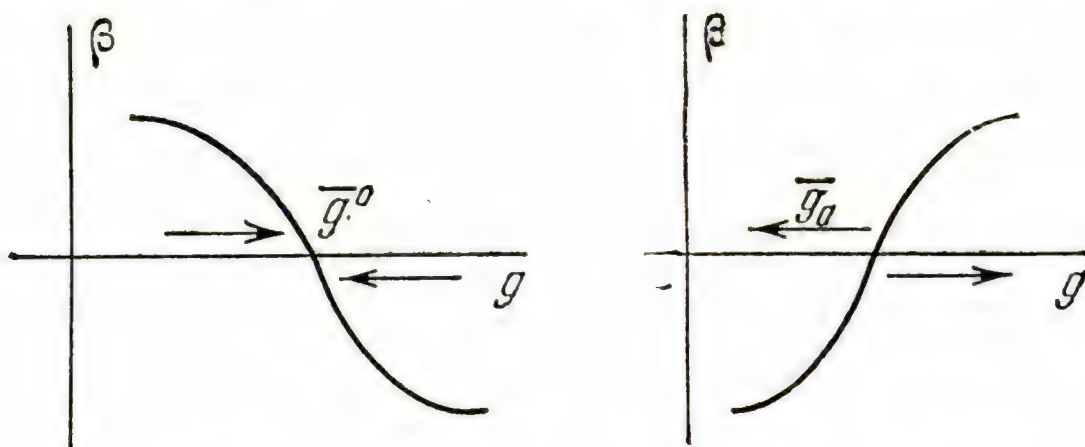


Рис. 19. Стабильный и нестабильный нули β -функции.

реально мы можем судить лишь о ее поведении в окрестности точки $g = 0$. Если в окрестности $g = 0$ β -функция отрицательна, то с увеличением κ инвариантный заряд стремится к нулю. В этом случае говорят, что нуль является ультрафиолетово стабильной точкой, а теория асимптотически свободна. Последнее означает, что с ростом энергии эффективное взаимодействие становится все слабее, и на малых расстояниях частицы ведут себя как свободные. В случае, когда функция β положительна вблизи нуля, эффективный заряд возрастает с ростом энергии, в результате чего мы выходим за рамки применимости теории возмущений.

В большинстве моделей квантовой теории поля реализуется вторая возможность. Например, в электродинамике в низшем порядке по α

$$\beta(\alpha) = \frac{\alpha^2}{3\pi}. \quad (2.20)$$

Подставляя это значение в формулу (2.18), получаем

$$\bar{\alpha}(\kappa, \alpha) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \kappa}. \quad (2.21)$$

Как видно, с ростом κ , $\bar{\alpha}(\kappa, \alpha)$ возрастает и при $\kappa = e^{3\pi/\alpha}$ обращается в бесконечность. Разумеется,

в действительности при $\kappa \sim e^{3\pi/\alpha}$ формула (2.21) неприменима, поскольку функция β была вычислена в предположении о малости эффективной константы связи.

Если все же попытаться экстраполировать формулу (2.21) в область больших $\bar{\alpha}$, то мы немедленно придем к противоречию. В электродинамике инвариантный заряд связан с фотонной функцией Грина соотношением

$$\bar{\alpha}(\kappa, \alpha) = \alpha d(\kappa, \alpha), \quad (2.22)$$

где

$$D_{\mu\nu}(k) = -\frac{1}{k^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) d(k^2, \alpha). \quad (2.23)$$

Поэтому обращение знаменателя в выражении (2.21) в нуль означает существование у фотонной функции Грина полюса. Нетрудно убедиться, что вычет в этом полюсе отрицателен. Соответствующее состояние имеет отрицательную норму, что противоречит условию унитарности. Таким образом, в случае, когда $\beta(g) > 0$ при $g \sim 0$, теория возмущений не может дать никакой надежной информации об асимптотическом поведении функций Грина.

Иначе обстоит дело в теории Янга — Миллса. В этой теории $\beta(g)$ отрицательна в окрестности нуля, и следовательно, нуль является ультрафиолетово стабильной точкой. Действительно, по определению,

$$\beta(g) = \left. \frac{\partial \bar{g}^2(\kappa, g)}{\partial \kappa} \right|_{\kappa=1}, \quad (2.24)$$

где в случае поля Янга — Миллса инвариантный заряд равен

$$\bar{g}^2(\kappa, g) = g^2 \Gamma_3^2 D^3(\kappa). \quad (2.25)$$

Поскольку $\kappa = \frac{k^2}{\lambda}$,

$$\left. \frac{\partial}{\partial \kappa} \right|_{\kappa=1} = -\lambda \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=k^2} = -\left. \frac{\partial}{\partial \ln \lambda} \right|_{\lambda=k^2}. \quad (2.26)$$

С другой стороны,

$$\left. \frac{\partial}{\partial \ln \lambda} D\left(\frac{k^2}{\lambda}\right) \right|_{\lambda=k^2} = -\left. \frac{\partial}{\partial \ln \lambda} z_2^{-1}\left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right) \right|_{\lambda=\Lambda}, \quad (2.27)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \ln \lambda} \Gamma_3\left(\frac{k^2}{\lambda}\right) \right|_{\lambda=k^2} = -\left. \frac{\partial}{\partial \ln \lambda} z_1\left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right) \right|_{\lambda=\Lambda}. \quad (2.28)$$

Поэтому для определения $\beta(g)$ мы можем воспользоваться найденными ранее значениями z_i . Получаем таким образом

$$\beta(g^2) = -\frac{22}{3} \frac{g^4}{(4\pi)^2}. \quad (2.29)$$

Следовательно, квадрат инвариантного заряда при $\kappa \rightarrow \infty$, стремится к нулю:

$$\bar{g}^2(\kappa, g^2) = \frac{1}{1 + \frac{g^4}{(4\pi)^2} \frac{22}{3} \ln \kappa}. \quad (2.30)$$

В глубокоевклидовой области взаимодействие «вымирает» и теория ведет себя как свободная. Для случая произвольной калибровочной группы и с учетом взаимодействия с полями материи функция $\beta(g)$ дается формулой

$$\beta(g^2) = \left[-\frac{11}{3} C(G) + \frac{4}{3} T(R) \right] \frac{g^2}{16\pi^2}, \quad (2.31)$$

где

$$\delta^{ab} C(G) = t^{acd} t^{bcd}; \quad T(R) \delta^{ab} = \text{tr} \{ \Gamma^a, \Gamma^b \}, \quad (2.32)$$

где t^{acd} — структурные константы группы, Γ^i — генераторы представления, реализуемого полями материи. Если число мультиплетов полей материи не слишком велико, то и в этом случае теория асимптотически свободна.

Таким образом, если переносчиками сильных взаимодействий являются поля Янга — Миллса, то на малых расстояниях мы действительно будем наблюдать квазисвободные частицы, что согласуется с результатами экспериментов по глубоко неупругому рассеянию.

Наоборот, при $\kappa < 1$ эффективная константа взаимодействия возрастает. Конечно, в этом случае формула (2.30), полученная на основании теории возмущений, уже неприменима. Тем не менее, если β -функция не имеет нулей при $g > 0$, то, как следует из уравнения (2.18),

$$\bar{g}(\kappa, g) \rightarrow \infty, \quad \kappa \rightarrow 0. \quad (2.33)$$

Подобное поведение инвариантного заряда означало бы, что с увеличением расстояния взаимодействие не-

ограниченно возрастает и, следовательно, частицы не могут разойтись на большие расстояния.

Описанная выше качественная картина реализуется в гипотетической модели сильных взаимодействий, получившей название «квантовой хромодинамики». В этой модели адроны считаются связанными состояниями кварков. Существует несколько типов кварков, отличающихся квантовым числом — «запахом». Примерами «запахов» являются странность, очарование. Каждый кварк в свою очередь может существовать в трех разновидностях, отличающихся «цветом». Таким образом, кварки представляются следующей матрицей:

$$\begin{pmatrix} u_r & u_y & u_b \\ d_r & d_y & d_b \\ c_r & c_y & c_b \\ s_r & s_y & s_b \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Здесь индексы r, y, b обозначают «цвета» (red, yellow, blue), а буквы u, d, c, s — различные запахи. Взаимодействие между кварками осуществляется за счет обмена цветными полями Янга — Миллса, «глюонами». Калибровочная группа SU_3 действует в пространстве цветов. Поля Янга — Миллса образуют цветной октет и нейтральны по отношению к «запахам». Лагранжиан сильных взаимодействий имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8} \text{tr} \{ \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu} \} + \bar{q} \{ i \gamma_\mu [\partial_\mu - g \Gamma(\mathcal{A}_\mu)] - m \} q; \quad (2.35)$$

$$q = u, d, \dots$$

Цветовая SU_3^c -симметрия предполагается точной. Это значит, что поля Янга — Миллса имеют строго нулевую массу.

Наблюдаемый спектр адронов порождается синглетными по отношению к группе SU_3^c (бесцветными) связанными состояниями кварков. В приближении, когда все кварки имеют одинаковые массы, лагранжиан (2.35) инвариантен относительно преобразований группы SU^f , действующей в пространстве запахов. Поэтому спектр барионов удобно классифицировать по группе SU^f (до недавнего времени наиболее популярным кандидатом

на роль группы SU^f считалась группа $SU(4)$. В действительности симметрия SU^f нарушена, благодаря чему вырождение по массам внутри адронных мультиплетов отсутствует. Наиболее проблематичным в этой схеме является вопрос о том, почему кварки не наблюдаются экспериментально, и почему, несмотря на нулевую массу полей Янга — Миллса, сильные взаимодействия имеют конечный радиус. Для объяснения этих фактов выдвигается гипотеза о «невывлете» кварков, основанная на том, что теория, описываемая лагранжианом (2.35), асимптотически свободна. В духе обсуждения на стр. 224 предполагается, что благодаря асимптотической свободе эффективная константа взаимодействия неограниченно растет с увеличением расстояния между взаимодействующими объектами. В результате «цветные» объекты — кварки, глюоны, вообще не могут разойтись на макроскопические расстояния. Наблюдаемыми являются лишь бесцветные связанные состояния, соответствующие реальным адронам. Эффективное взаимодействие этих связанных комплексов имеет конечный радиус действия, и именно его мы наблюдаем в экспериментах при умеренных энергиях.

ПРИМЕЧАНИЯ И ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

Как уже отмечалось в предисловии, наша книга является дополнением к существующим руководствам по квантовой теории поля, из которых нам ближе всего монография Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова «Введение в теорию квантованных полей» [1]. В отличие от большинства курсов квантовой теории поля у нас основным средством описания квантовой динамики является метод континуального интеграла. Этот метод в применении к задачам квантовой механики излагается в книге Р. Фейнмана и А. Хиббса [2], а его использованию в теории систем с бесконечным числом степеней свободы посвящены недавно опубликованные монографии А. Н. Васильева [3] и В. Н. Попова [4]. Классические геометрические аспекты калибровочных полей освещены в монографии Н. П. Коноплевой и В. Н. Попова [5], а их квантование и приложения к моделям элементарных частиц кратко описаны в книге Дж. Тейлора [6].

Глава I

Калибровочные поля были введены в физику в работе Ч. Н. Янга и Р. Миллса [7] на примере полей, переносящих взаимодействие изотопических спинов. Естественное обобщение на случай внутренних степеней свободы более общей природы обсуждается, например, в работах [8, 9, 10].

На специфику квантования неабелевых калибровочных полей впервые обратил внимание Р. Фейнман [11]. Его подход, основанный на восстановлении диаграмм с петлями по диаграммам типа деревьев, был развит Де-Виттом [12], сформулировавшим окончательные правила квантования калибровочных полей и поля тяготения в работе [13]. Независимый вывод правил теории возмущений для этих теорий, основанный на функциональном интегрировании, был получен Л. Д. Фаддеевым и В. Н. Поповым в работе [14] (см. также [15]). Построению теории возмущений для калибровочных полей посвящены также работы [16, 17, 18]. Высказанная в лекциях Фейнмана [11] гипотеза о том, что теория возмущений для калибровочных полей может быть получена как предел при $m \rightarrow 0$ теории массивных векторных полей, оказалась неверной [19, 20]. Первые реалистические модели объединенных взаимодействий, основанные на механизме Хиггса [21, 22, 23], были сформулированы С. Вейнбергом [24] и А. Саламом [25].

В 1971 г. Г'т Хоофт распространил процедуру квантования полей Янга-Миллса на случай теорий со спонтанно нарушенной

симметрией [26]. В 1971—1972 гг. в серии работ А. А. Славнова [27, 28], Дж. Тейлора [29], Б. Ли и Ж. Зин-Жюстена [30], Г'т Хоофта и М. Вельтмана [31] были развиты методы инвариантной регуляризации и перенормировки для теории калибровочных полей (в том числе и для моделей со спонтанно нарушенной симметрией), и тем самым было в основном завершено построение квантовой теории калибровочных полей в рамках теории возмущений. Различные аспекты теории калибровочных полей и их приложения освещаются в докладах, сделанных на международных конференциях по физике высоких энергий Б. Ли [32], Ж. Иллиопулусом [33], А. Славновым [34].

С точки зрения дифференциальной геометрии классическое поле Янга—Миллса представляет собой связность в главном расслоенном пространстве, базой которого является многообразие пространства-времени, а типичным слоем — группа внутренней симметрии. Понятие связности, обобщающей евклидову связность в римановом пространстве, разрабатывалось начиная с 20-х годов в работах многих геометров, в частности, Г. Вейля и Э. Картана. В современной формулировке оно появилось впервые в работе Эресмана [35]. Отличное введение в теорию расслоенных пространств и связностей можно найти в книге Лихнеровича [36].

В двадцатых годах в связи с успехами общей теории относительности делалось много попыток геометризовать электромагнитное поле. Правильный взгляд на это поле как на часть связности, входящую в ковариантную производную комплексных полей, появился в работах Г. Вейля [37] и В. А. Фока [38] по формулировке уравнения Дирака в гравитационном поле. Г. Вейль прямо говорит об электродинамике как об общей теории относительности в зарядовом пространстве.

Классические решения уравнений движения, включающих калибровочные поля, являются предметом интенсивного исследования в последние три года. Мы приведем ссылки на несколько главных работ в этой области [39, 40, 41, 42], в которых исследовались такие решения как для вакуумного, так и для солитонного секторов.

Глава II

Континуальный интеграл для формулировки квантовой динамики впервые введен в работах Фейнмана. Историю и основные идеи можно найти в монографии [2]. Фейнмановские диаграммы в теории возмущений, введенные в работе [43], были обоснованы при помощи континуального интеграла в работе [44]. Монографии [3, 4] содержат более современный обзор приложений метода континуального интеграла к квантовой физике. Изложение метода континуального интегрирования в данной книге следует лекциям одного из авторов [45]. Введение континуального интеграла в квантовой механике при помощи формулы (2.1.12) взято из работы Тобокмана [46]. Голоморфное представление квантовой механики идет от работ В. А. Фока; под названием когерентных состояний оно появилось в квантовой оптике. Его математическую формулировку можно найти в монографии Ф. А. Березина [47]. Там же можно найти первое строгое изложение интегрирования по антикоммутирующим переменным.

Граничные условия в континуальном интеграле рассматривались О. И. Завьяловым [48] и А. Н. Васильевым [3].

Функции Грина были введены в квантовую теорию поля Ю. Швингером [49]. Ему же принадлежит идея сведения проблемы вычисления S -матрицы к задаче об S -матрице для рассеяния на внешнем источнике [50].

Введение континуального интеграла через гауссов функционал намечено в первом издании монографии [1]. Изложение аксиоматики континуального интеграла при помощи гауссова функционала в книге следует работе одного из авторов [51]. Сходный подход был развит также в [52].

Глава III

Обобщенная гамильтонова динамика была впервые введена Дираком [53] (см. также его лекции [54]). Гамильтонова формулировка калибровочных теорий в кулоновской калибровке исследовалась Ю. Швингером [55]. Общая формулировка континуального интеграла в обобщенной гамильтоновой форме была дана одним из авторов [56]. Гамильтонова калибровка $A_0 = 0$, менее популярная по сравнению с кулоновской $\partial_i A_i = 0$, была положена в основу построения теории калибровочных полей в лекциях Фейнмана [57].

Метод замены переменных в континуальном интеграле для перехода от одной калибровки к другой был предложен в работе [14]. Его геометрическая интерпретация в терминах различных параметризаций калибровочно-эквивалентных классов обсуждается в работах [56, 58]. Обобщенные α -калибровки впервые аккуратно были рассмотрены в работе [13] (см. также [17, 56]). Метод перехода к обобщенной α -калибровке, излагаемый в книге, заимствован из работы Г'т Хоофта [26].

Глава IV

Теория перенормировок восходит к идеям, высказанным Р. Крамерсом [59] и Г. Бете [60]. В ее развитии принимал участие целый ряд авторов, включая Р. Фейнмана, Ю. Швингера, Ф. Дайсона, А. Салама и др. Законченная математически строгая теория перенормировок (теория R -операции) была впервые построена Н. Н. Боголюбовым и О. С. Парасюком [61]. Прекрасное изложение R -операции можно найти в монографии [1], где приведена также подробная библиография по теории перенормировок.

Регуляризация с помощью высших ковариантных производных была впервые предложена в работе А. А. Славнова [62], а затем применена к теории Янга — Миллса в работах [28, 30]. Дополнительная регуляризация однопетлевых диаграмм, описанная в § 4, была построена в работе [63].

Размерная регуляризация была предложена в работах Г'т Хоофта и М. Вельтмана [31], К. Боллини и Г. Гиабьяги [64], Дж. Ашмора [65].

Тождества, связывающие двух и трехточечные функции Грина в квантовой электродинамике были впервые получены Дж. Уордом [66]. Обобщенные соотношения, связывающие любую функцию

Грина с функцией, содержащей на единицу меньшее число внешних фотонных линий, были получены Е. С. Фрадкиным [67] и И. Такахаши [68]. Электродинамические тождества Уорда не обобщаются непосредственно на случай неабелевых калибровочных полей. В неабелевой теории их роль играют так называемые обобщенные тождества Уорда, полученные впервые А. А. Славновым [27] и Дж. Тейлором [29]. Их вывод, приведенный в книге, следует работе [69]. Альтернативный вывод, основанный на использовании инвариантности эффективного лагранжиана относительно некоторого преобразования с антикоммутирующими параметрами (суперпреобразования) был предложен К. Бекки, А. Рюэ и Р. Стора [70]. В литературе используются также обобщенные тождества Уорда для одночастично-неприводимых функций Грина, полученные Б. Ли [71], см. также [52]. Структура перенормированного действия исследовалась в работах [27, 29, 30, 31], результатом которых явилось доказательство калибровочной инвариантности и унитарности перенормированной S -матрицы. Другой подход к перенормировке калибровочных теорий, основанный на использовании формализма нормальных произведений Циммермана, был развит К. Бекки, А. Рюэ и Р. Стора [70, 72].

Вопрос о зависимости констант перенормировки и функций Грина от выбора калибровочного условия подробно обсуждался в работе Р. Каллош и И. Тютина [73].

Аномальные тождества Уорда были впервые изучены С. Адлером [74] и Дж. Беллом и Р. Джакивом [75]. Их роль в проблеме перенормируемости калибровочных теорий обсуждалась в работах [76—79]. Классификация аномальных взаимодействий, приведенная в книге, следует работе Г. Джорджи и Ш. Глешоу [79].

Глава V

Первая (и до сих пор наиболее популярная) реалистическая объединенная модель слабых и электромагнитных взаимодействий была построена С. Вейнбергом [24] и А. Саламом [25]. Существует большое число объединенных моделей, отличающихся от модели Вейнберга — Салама либо выбором калибровочной группы, либо мультиплетным содержанием. С некоторыми из них можно познакомиться по обзорным докладам [32, 33, 34]. В настоящее время вопрос о конкретном выборе той или иной модели не решен.

Механизм подавления меняющих странность нейтральных токов за счет введения нового «очарованного» кварка был предложен Ш. Глешоу, Ж. Иллиопулосом и Л. Майани [80].

Гипотеза о существовании дополнительной степени свободы у кварков, получившей впоследствии название «цвета», была выдвинута в работах О. Гринберга [81], Н. Н. Боголюбова, Б. В. Струминского и А. Н. Тавхелидзе [82], М. Хана и И. Намбу [83] для объяснения статистики адронов. В работах А. Салама и И. Пати [84], М. Гелл-Мана, Р. Фрича и Г. Лейтвилера [85], С. Вейнберга [86], было высказано предположение, что сильные взаимодействия осуществляются за счет обмена янг-миллсовскими мезонами, взаимодействующими с цветовыми степенями свободы. Соответствующая гипотетическая модель получила название квантовой хромодинамики.

Групповой характер преобразований перенормировки был впервые отмечен Е. Штюкельбергом и А. Петерманом [87]. Группа мультипликативных перенормировок в квантовой электродинамике была использована М. Гелл-Манном и Ф. Лоу [88] для исследования ультрафиолетовых асимптотик функций Грина. Общая теория ренормгруппы была построена в работах Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова [89, 90]. Подробное изложение этой теории можно найти в монографии [1]. Дифференциальные уравнения ренормгруппы исследовались Л. В. Овсянниковым [91]. Аналогичные уравнения для случая квантовой теории поля были получены К. Калланом [92] и К. Симанчиком [93]. Асимптотическая свобода полей Янга — Миллса была обнаружена Г'т Хоофтом [94], Д. Гроссом и Ф. Вилчеком [95], Политцером Х. [96]. Гипотеза о «невывлете кварков» обсуждалась в работах [85, 86, 97, 98].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантовых полей. — М.: Наука, 1976.
2. Фейнман Р., Хиббс А. Квантовая механика и интегралы по путям. — М.: Мир, 1968.
3. Васильев А. Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. — Изд-во ЛГУ, 1976.
4. Попов В. Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. — М.: Атомиздат, 1976.
5. Коноплева Н. П., Попов В. Н. Калибровочные поля. — М.: Атомиздат, 1972.
6. Taylor J. C. Gauge Theories of Weak Interactions, Cambridge University Press, Cambridge, 1976.
7. Yang C. N., Mills R. L. Phys. Rev., **96**, 191, 1954.
8. Utiyama R., Phys. Rev. **101**, 1597, 1956.
9. Salam A., Ward J. C., Nuovo Cimento, **XI**, 568 (1959).
10. Glashow S. L., Gell-Mann M., Ann. of Phys. **15**, 437 (1961)
11. Feynman R., Acta Phys. Polonica, **24**, 697 (1963).
12. De Witt B. Phys. Rev. Lett. **12**, 742, 1964.
13. De Witt B. Phys. Rev. **160**, 1113; 1195 (1967).
14. Faddeev L. D., Попов В. Н. Phys. Lett, B **25**, 30 (1967).
15. Попов В. Н., Фаддеев Л. Д. Препринт ИТФ АН УССР. Киев, 1967.
16. Mandelstam S., Phys. Rev., **175**, 1580 (1968).
17. Fradkin E. S., Tyutin I. V., Phys. Lett. **B30**, 562 (1969); Phys. Rev. **2**, 2841 (1970).
18. Вайнштейн А. И., Хриплович И. Б. Ядерная Физика, **13**, 198, 1971.
19. Boullware A., Ann. Phys., **56**, 140, 1970.
20. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. ТМФ, **3**, 18, 1970.
21. Higgs P. W. Phys. Lett. **12**, 132, 1964.
22. Englert F., Brout R. Phys. Rev. Lett. **13**, 321, 1964.
23. Kibble T. W. B., Phys. Rev. **155**, 1554 (1967).
24. Weinberg S., Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).
25. Salam A. Elementary Particle Theory ed. N. Svartholm. Stocholm. Almquist, Forlag AB, 1968.
26. G't Hooft, Nucl. Phys. **B35**, 167, 1971.
27. Славнов А. А., ТМФ **10**, 99, 1972.
28. Славнов А. А., ТМФ **13**, 174, 1972.
29. Taylor J. C. Nucl. Phys. **B33**, 436, 1971.
30. Lee B. W., Zinn-Justin J. Phys. Rev. **D5**, 3137, 1972.

31. G't Hooft, Veltman M. Nucl. Phys. **B44**, 189, **B50**, 318.
32. Lee B. W. «Proceedings of the XVI International Conference on High Energy Physics», Batavia, 1972.
33. Iliopoulos J. «Proceedings of the XVII International Conference on High Energy Physics». London, 1974.
34. Славнов А. А. Труды XVIII Международной конференции по физике высоких энергий. Тбилиси, 1976.
35. Ehresmann. Coll. top. Bruxelles, p. 29 (1950).
36. Лихнерович А. Теория связностей в целом и группы голономий. — М.: ИЛ. 1960.
37. Weil H. ZS. f. Phys. **56**, 330, 1929.
38. Fock V. Journ. de Physique, **10**, 392, 1929.
39. Поляков А. М. Письма в ЖЭТФ, **20**, 430, 1974.
40. G. t'Hooft, Nucl. Phys. B **79**, 2761 (1974).
41. Faddeev L. D., preprint MPI-RAE/Pth Munchen (1974).
42. Belavin A. A., Polyakov A. M., Tyupkin Y., Schwarz A. S., Phys. Lett. **B59**, 85, 1975.
43. Feynman R. P., Rev. Mod. Phys. **20**, 367 (1948).
44. Feynman R. P., Phys. Rev., **80**, 440 (1950).
45. Faddeev L. D., Les Houches Lecture, Session XX ed. North Holland, 1976.
46. Tobocean W., Nuovo Cimento, **3**, 1213 (1956).
47. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. — М.: Наука, 1965.
48. Завьялов О. И. Диссертация МИАН. Москва, 1970.
49. Schwinger J., Phys. Rev. **75**, 651, 1949.
50. Schwinger J. Proc. Nat. Acad. Sci., **37**, 452 (1951).
51. Славнов А. А. ТМФ, **22**, 177, 1975.
52. Zinn-Justin J. Lecture Notes in Physics. **37**, Berlin, Springer-Verlag.
53. Dirac P. A. M. Proc. Roy. Sci. A **246**, 326 (1958).
54. Дирак П. А. М. Лекции по квантовой механике. — М.: Мир, 1968.
55. Schwinger J., Phys. Rev. **125**, 1043, 1962; **127**, 324, 1962.
56. Фаддеев Л. Д. ТМФ, **I**, 3, 1969.
57. Feynman R., Les Houches Lectures, ed. North Holland, 1977.
58. Попов В. Н., Фаддеев Л. Д. УФН. **111**, 427, 1973.
59. Kramers H. A. Rapports du 8^e Conseil Solvay, Brussels, 1950.
60. Bethe H. A. Phys. Rev. **72**, 339, 1947.
61. Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С. ДАН СССР, **55**, 149, 1955; **100**, 429, 1955. Acta Math. **97**, 227, 1957.
62. Славнов А. А., Nucl. Phys. **B31**, 301, 1971.
63. Славнов А. А. ТМФ, **33**, 210, 1977.
64. Bollini C. G., Giabidgi J. T., Phys. Lett. **40B**, 566, 1972.
65. Ashmore J. F. Nuovo Cimento, Lett. **4**, 289, 1972.
66. Ward J. C. Phys. Rev. **77**, 2931, 1950.
67. Фрадкин Е. С. ЖЭТФ, **29**, 288, 1955.
68. Takahashi Y. Nuovo Cimento, **6**, 370, 1957.
69. Slavnov A. A. Nucl. Phys. **B97**, 155, 1975.
70. Becchi C., Rouet A., Stora R. Com. Math. Phys. **42**, 127, 1975.
71. Lee B. W. Phys. Lett. **46B**, 214, 1974, Phys. Rev. **9**, 933, 1974.

72. Becchi C, Rouet A., Stora R., «Renormalization Theory» Ed. G. Velo, A. A. S. Wightman — D. Reidel, Publ. Co. 1976; Ann. of Phys. **98**, 287, 1976.
73. Каллош Р., Тютин И. ЯФ, **17**, 190, 1973.
74. Adler S. L. Phys. Rev, **177**, 2426, 196.
75. Bell S., Jackiw R., Nuovo Cim., **60A**, 47, 1969.
76. Славнов А. А. ТМФ, **7**, 13, 1971.
77. Gross D. J., Jackiw R., Phys. Rev., **D6**, 477, 1972.
78. Bouchiat C., Illiopoulos J., Meyer P., Phys. Let. **38B**, 519, 1972.
79. Georgi H., Glashow S. L., Phys. Rev., **D6**, 429, 1977.
80. Glashow S. L., Illiopoulos J., Maiani L., Phys. Rev. **D2**, 185 (1970).
81. Greenberg O. W., Phys. Rev. Let. **13**, 598, 1964.
82. Боголюбов Н. Н., Струминский Б. В., Тавхелидзе А. Н., JINR Preprint D-1968, 1965 г.
83. Han M. Y., Nambu Y. Phys. Rev. **139**, B 1006, 1965.
84. Pati J., Salam A. Phys. Rev. **D8**, 1240, 1973.
85. Fritzsch H., Gell-Mann M., Leutwyler H., Phys. Let. **47B**, 365, 1973.
86. Weinberg S., Phys. Rev. Lett, **31**, 494, 1973.
87. Stueckelberg E. C. G., Peterman A., Helv. Phys. Acta **26**, 499, 1953.
88. Gell-Mann M., Low F., Phys. Rev. **95**, 1300, 1954.
89. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. ДАН СССР, **103**, 203, 391, 1955.
90. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. ЖЭТФ, **30**, 77; Nuovo Cim. **3**, 845, 1956.
91. Овсянников Л. В. ДАН СССР, **109**, 112, 1956.
92. Callan C. Phys. Rev. **D2**, 1542, 1970.
93. Symanzik K. Comm. Math. Phys., **18**, 227, 1970.
94. G't Hooft. Report at the Conference on Lagrangian field theories, Marseille, 1972.
95. Gross D., Wilczek F. Phys. Rev. **D8**, 3633, 1973.
96. Politzer U. O. Phys. Reports, **14C**, 129, 1974.
97. Polyakov A. M. Phys. Let. **59B**, 82, 1975.
98. Wilson K. Erice Lectures. CNLS—321, 1975.

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

(x, y) — точки пространства Минковского, (x, t) , (y, s) [или (x, x_0) , (y, y_0)] — их пространственные и временные компоненты соответственно.

Метрический тензор $g^{\mu\nu}$ имеет вид $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Все векторы считаются ковариантными; $ab = a_\mu b_\mu = a_0 b_0 - (a, b)$ — скалярное произведение четырехмерных векторов a, b с компонентами a_μ, b_μ ; компоненты четырехмерных векторов нумеруются греческими буквами, а трехмерных — латинскими.

Постоянные $\hbar$ и c , если это не оговорено особо, считаются равными единице.

Андрей Алексеевич Славнов
Людвиг Дмитриевич Фаддеев



ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ ТЕОРИЮ
КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

М., 1978 г., 240 стр. с илл.

Редактор В. В. Абгарян
Техн. редактор Е. В. Морозова
Корректоры Е. А. Белицкая, Л. Н. Боровина

ИБ № 11006

Сдано в набор 11.04.78. Подписано к печати 30.10.78. Т-20086.
Формат $84 \times 108^{1/32}$, Бумага тип. № 1. Литературная гарнитура.
Высокая печать. Условн. печ. л. 12,6. Уч.-изд. л. 12,7. Тираж
7000 экз. Заказ № 2528. Цена книги 1 р. 10 к.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано с матриц Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградской типографии № 2 имени Евгении Соколовой «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29 в Ленинградской типографии № 4 «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Ленинград, Ф-126, ул. Социалистическая, д. 14.

ВВЕДЕНИЕ
ОТЪ ПРАВОСЛАВНЫХЪ
КЪ АКАДЕМИИ
ПРОСВЕЩЕННЫМЪ
ПОНЯТИЕМЪ
ОБЪ ИСТИННОМЪ
ХРИСТИАНСТВѢ

мые структуры, например, члены, пропорциональные симметричному тензору d^{abc} в случае группы SU_3 . Данное ниже доказательство перенормируемости остается справедливым и в этом случае.):

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(p) &\equiv \Gamma_{\mu\nu}^{ab}(p) = \delta^{ab} \{b_1 g_{\mu\nu} + b_2 p_\mu p_\nu + \\ &\quad + b_3 (p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu)\} + \dots, \\ \Gamma_{\bar{c}c}^{ab}(p) &\equiv \Gamma^{ab}(p) = \delta^{ab} b_4 p^2 + \dots, \\ \Gamma_{\mathcal{A}^3} &\equiv \Gamma_{\lambda\nu\rho}^{lmn}(p, k, q) = i\varepsilon^{lmn} b_5 \{g_{\lambda\nu} (p - k)_\rho + \\ &\quad + g_{\nu\rho} (k - q)_\lambda + g_{\lambda\rho} (q - p)_\nu\} + \dots, \quad (7.6) \\ \Gamma_{\mathcal{A}\bar{c}c} &\equiv \Gamma_\mu^{lmn}(p, k, q) = \frac{i}{2} \varepsilon^{lmn} b_6 (k - q)_\mu + \dots, \\ \Gamma_{\mathcal{A}^4} &\equiv \Gamma_{\mu\nu\rho\lambda}^{ilmn}(p, k, q, r) = \\ &= P \{b_7 \varepsilon^{gil} \varepsilon^{gmn} g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} + b_8 \delta^{il} \delta^{mn} g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}\} + \dots \end{aligned}$$

В последней формуле P — оператор симметризации по парам индексов (i, μ) , (l, ν) , (m, ρ) , (n, λ) . Коэффициенты b_i зависят от параметров регуляризации Λ , μ , и положения точек вычитания a_i ; ... обозначает следующие члены разложения в ряд Тейлора, стремящиеся при снятии регуляризации к конечному пределу. Вычитание полиномов (7.6) эквивалентно введению в эффективный лагранжиан следующих контрчленов:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{L} = \frac{1}{4} \text{tr} \left\{ b_1 \mathcal{A}_\mu^2 + b_2 (\partial_\mu \mathcal{A}_\mu)^2 + \frac{b_3}{2} (\partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu)^2 + \right. \\ \left. - 2b_4 \bar{c} \square c + b_5 (\partial_\nu \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \mathcal{A}_\nu) [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] + \right. \\ \left. + b_6 \bar{c} \partial_\mu [\mathcal{A}_\mu, \bar{c}] + \frac{b_7}{2} [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] \right\} + \\ + \frac{b_8}{16} \{\text{tr} (\mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\mu)\}^2. \quad (7.7) \end{aligned}$$

Число типов контрчленов, необходимых для устранения расходимостей, конечно и, следовательно, теория перенормируема. Однако контрчленная часть действия (7.7) содержит значительно больше параметров чем исходный лагранжиан. При произвольных параметрах b_i перенормированная теория не калибровочно-инвариантна и не удовлетворяет принципу относительности, что означает